

# فصل 8

## آنالیز مدارهای LTI در حالت دائمی سینوس

مدارهای الکتریکی که در بیشتر کاربردها از آنها استفاده می شود تا حدود زیادی رفتارهای مدار LTI را از خود نشان می دهند. این مدارها کاربردهای وسیعی در انواع مقاصد از جمله تقویت کردن یک سیگنال را دارند. از آنجا که مثلا در عمل تقویت کنندگی، یک سیگنال دارای شکل دلخواهی هست باید به روشی بتوان عملکرد مدار الکتریکی را در مقابل چنین تحریکی تجزیه و تحلیل نمود. بدین منظور از مفهوم سری فوریه استفاده می کنیم. می دانیم که هر سیگنال تناوبی قابلیت تفکیک به تعداد بی نهایت سیگنال سینوسی با فرکانسهایی را دارد که مضاربی صحیح از یک فرکانس اصلی و به هر حال خود سینوسی اند. اگر فرض کنیم سیگنال دلخواهی را بتوان پرریودیک فرض کرده و آنرا بر حسب سری فوریه خودش بسط داد، مثل این است که یک سیگنال دلخواه حاوی تعداد بی شماری تابع سینوسی هست که با یکدیگر جمع شده اند و به ورودی مدار LTI اعمال می گردند. از آنجا که مدار، خطی و تغییر ناپذیر با زمان است می توان تنها اثر یک سینوسی را بررسی کرده و از تعمیم آن، کل پاسخ را بدست آورد. بنابراین، در این فصل رفتار مدارهای LTI را به ورودیهایی با شکل سینوسی بررسی خواهیم نمود. در این راستا ابتدا مروری بر اعداد مختلط داریم، سپس مفهوم فازور و کاربرد آن در مدارات را ارائه خواهیم نمود. در ادامه نیز مدارهای تشدید، تابع شبکه و پاسخ فرکانسی را مطرح می نمائیم. نهایتا مفاهیم توان و کاربرد آنها در مدارات LTI با ورودی سینوسی را مطالعه می نمائیم.

### ۸-۱ مروری بر اعداد مختلط :

اعداد مختلط را در ریاضیات به شکل عمومی زیر نمایش می دهیم:

$$z = x + jy \quad \& \quad j \equiv \sqrt{-1} \quad (8-1)$$

در این تعریف  $x = \text{Re}(z)$  را قسمت حقیقی عدد موهومی  $z$  و همچنین  $y = \text{Im}(z)$  قسمت موهومی آن می نامیم. این نمایش برای عدد مختلط، به نمایش دکارتی موسوم است. نمایش قطبی برای این عدد نیز می تواند بر اساس ارتباط بین مختصات دکارتی و قطبی بشکل زیر باشد :

$$z = r e^{j\theta} \quad (8-2)$$

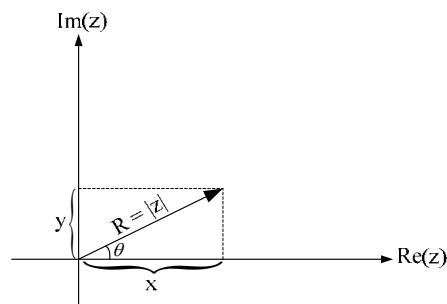
که در آن  $r \equiv |z|$  اندازه عدد مختلط  $z$  و  $\theta$  زاویه آن است که گاهی آنرا به شکل زیر:

$$\theta = \arg(z) = \angle z \quad (8-3)$$

نیز نشان می دهیم. برای  $r$  و  $\theta$  روابط زیر را داریم :

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} \quad \& \quad \theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{A-4})$$

قرارداد می کنیم که محدوده  $-\pi < \theta \leq \pi$  باشد و طبیعی است که همواره باید  $r \geq 0$  باشد. می توان به یک عدد مختلط نمایشی ترسیمی را نیز نسبت داد. به این ترتیب که همانطوریکه در شکل ۸-۱ دیده می شود صفحه ای موسوم به صفحه مختلط یا صفحه  $z$  را طوری تعریف کنیم که محور افقی آن مقادیر  $x = Re(z)$  و محور عمودی آن مقادیر  $Im(z) = y$  را نشان دهد. سپس عدد مختلط  $z$  را برداری تعریف نمائیم که ابتدای آن مبدا و انتهای آن نقطه ای با مختصات  $(x, y)$  است. تنها نکته قابل اشاره در این ارتباط تعیین صحیح مکان نقطه  $z$  در صفحه مختلط است که بر اساس  $x$  و  $y$  صورت می گیرد.



شکل ۸-۱ ترسیم قراردادی عدد مختلط  $z$  در صفحه مختلط

مثال ۱ :

فرم قطبی هر یک از نقاط زیر را بدست آورید :

a)  $z_1 = 1 - j$

b)  $z_2 = -1 + j$

توجه کنید که برای هر یک از اعداد فوق، اندازه آنها برابر با  $\sqrt{2}$  است. اما برای  $z_1$  داریم:

$$\theta_1 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\pi/4 \quad (y < 0 \ \& \ x > 0)$$

و همچنین برای  $z_2$  :

$$\theta_2 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = 3\pi/4 \quad (x < 0 \ \& \ y > 0)$$

که چون  $z_1$  دارای  $x > 0$  و  $y < 0$  است پس در ربع چهارم از صفحه مختلط و چون  $z_2$  دارای  $x < 0$  و  $y > 0$  است در ربع سوم از صفحه مختلط واقع شده و لذا  $\theta_1 = -\pi/4$  ،  $\theta_2 = 3\pi/4$  خواهد بود.

اعداد مختلط را با یکدیگر ترکیب نمود و بدیهی است که حاصل نیز خود یک عدد مختلط است. در واقع مجموعه اعداد مختلط نسبت به عملیات تعریف شده ریاضی مجموعه ای بسته اند. مثلاً جمع و تفریق دو عدد  $z_1$  و  $z_2$  را در نظر بگیرید. می توان آنرا بشکل زیر نوشت :

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + jy_1 & \quad \& \quad z_2 = x_2 + jy_2 \\ \Rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \end{aligned} \quad (۸-۵)$$

یا ضرب و تقسیم آنها که مثلاً در ضرب دو عدد مختلط داریم :

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jx_2 y_1 + j^2 y_1 y_2$$

و از آنجا که  $j^2 = -1$  است پس:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (۸-۶)$$

که خود مجدداً یک عدد مختلط است. در این رابطه با استفاده از فرم قطبی نیز می توان ضرب را نوشت:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = |z_1| |z_2| e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)} \quad (۸-۷)$$

اما اگر دو عدد  $z_1$  و  $z_2$  دارای قسمت‌های حقیقی یکسان و قسمت‌های موهومی قرینه هم باشند آنگاه ضرب آنها فرم ساده ای خواهد داشت:

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + jy_1 = x + jy & \quad \& \quad z_2 = x_2 + jy_2 = x - jy \\ \Rightarrow z_1 z_2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (۸-۸)$$

چنین دو عددی را مزدوج مختلط یکدیگر می نامیم و با نماد \* یا علامت بار "-" در بالای آن نشان می دهیم. پس اگر  $z = x + jy$  باشد آنگاه مزدوج مختلط z برابر است با:

$$z^* = \bar{z} = x - jy \quad (۸-۹)$$

توجه کنید که

$$\angle z = -\angle z^* \quad (۸-۹)$$

و بعلاوه

$$\begin{aligned} z + z^* &= 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \operatorname{Re}(z^*) \\ z - z^* &= 2j \operatorname{Im}(z) = -2j \operatorname{Im}(z^*) \end{aligned}$$

در عمل تقسیم دو عدد مختلط، با استفاده از مزدوج مختلط عدد موهومی موجود در مخرج بسیار ساده است. فرض کنید که دو عدد مختلط بشکل زیر تعریف شوند:

$$z_1 = x_1 + jy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

و بخواهیم حاصل تقسیم آنها را با شرط  $z_2 \neq 0$  بدست آوریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{x_2 + jy_2}$$

برای آنکه بتوان این حاصل را به یک عدد مختلط تبدیل کرد صورت و مخرج این کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم. داریم :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 - jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 + x_1y_2)}{x_2^2 - y_2^2} \quad (8-11)$$

البته این حاصل در توصیف قطبی بصورت زیر نیز نوشته می شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)} \quad (8-12)$$

در هر یک از روابط (8-11) و (8-12) باید  $z_2 \neq 0$  باشد، چنانکه گفته شد. منظور از صفر بودن یک عدد مختلط. صفر شدن توام قسمت حقیقی و موهومی آن است. در استفاده از اعداد مختلط گاهی اوقات لازم است روابط حاکم بر آنها را توسط تعدادی برابریهای ساده نیز نوشت. ابتدا عملیات روی  $j$  را بررسی کنیم. می دانیم که اگر  $j$  به توان ۲ برسد حاصل ۱- است. پس تعمیم قوای مختلف  $j$  بشکل زیر خواهد بود.

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = j^2 \times j = -j, \quad j^4 = j^2 \times j^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \times j = j, \quad j^6 = j^4 \times j^2 = j^2 = -1, \dots$$

که تعمیم آن به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} j^{4k+1} &= j \\ j^{4k+2} &= j^2 = -1 \\ j^{4k+3} &= j^3 = -j \\ j^{4(k+1)} &= 1 \end{aligned} \quad (8-13)$$

رابطه مفید دیگر از روی بسط  $e^{j\theta}$  بدست می آید. با توجه به رابطه های زیر:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad (8-14)$$

$$\sin u = \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots \quad \& \quad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots$$

و استفاده از روابط (8-13) میتوان نشان داد که رابطه زیر برقرار است:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

بخصوص توجه کنید که :

$$e^{j\pi} = -1 \quad (8-15) \quad e^{\pm j\pi/2} = \pm j \quad (8-16)$$

$$e^{j2m\pi} = 1 \quad (8-17) \quad |e^{j\theta}| = 1 \quad (8-18)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

بطوریکه از این پس، عدد ۱- را با  $e^{j\pi}$  و عدد ۱ را با  $e^{j2m\pi}$  نمایش خواهیم داد.

## ۸-۲ مفهوم فازور و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل:

می توان از اعداد مختلط در کاربردهای متنوعی استفاده نمود که موسوم ترین آنها در مدارات الکتریکی، تعیین پاسخ خاص از معادله دیفرانسیلی است که خطی با ضرائب ثابت بوده و طرف دوم آن یک تابع سینوسی وجود دارد. بدین منظور مفهوم زیر موسوم به فازور را تعریف می نمائیم:

**تعریف:** اگر تابعی مثل  $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$  موجود باشد آنگاه بنا به تعریف فازور آنرا

**بشکل زیر تعریف می کنیم:**

$$F = F_m e^{j\varphi} \quad (۸-۱۹)$$

**بطوریکه:**

$$|F| = F_m \quad \& \quad \angle F = \varphi \quad (۸-۲۰)$$

بدیهی است که تابعی مثل  $v(t) = 2 \sin(5\pi t)$  دارای فازوری معادل با  $V = 2e^{-j\pi/2}$  بوده و توابعی مثل  $h(t) = t$  ,  $g(t) = \tan t$  ,  $r(t) = t \cos(\omega t + \varphi)$  ,  $P(t) = \cos(t^2)$  و ... دارای فازور نیستند. بعلاوه فازور  $q(t) = -3 \cos(\omega t + \varphi)$  برابر است با (چرا؟):  $Q = 3e^{j(\varphi - \pi)}$ . توجه کنید که در تعریف فازور بیانی از فرکانس زاویه ای (یا در اختصار فرکانس) وجود ندارد. مثلاً فرض کنید توابع زیر را داریم:

$$v_1(t) = 4 \cos(2\pi t + \pi/8)$$
$$v_2(t) = 4 \cos(t + \pi/8)$$

فازور هر دو تابع  $v_1 = v_2(t) = 4e^{j\pi/8}$  است. لذا در کاربرد فازورها باید اطلاعات فرکانسی را بطور ضمنی در نظر داشت. بعلاوه اگر فازوری را به همراه فرکانس زاویه ای  $\omega$  از آن داشته باشیم میتوان تابع سینوسی نظیر آنرا بدست آورد. فرض کنید فازوری مثل  $F$  موجود است، می توان تابع زمانی سینوسی آنرا با فرض فرکانس زاویه ای  $\omega$  برای آن بشکل زیر نوشت:

$$f(t) = \operatorname{Re}[F e^{j\omega t}] \quad (۸-۲۱)$$

چرا که با فرض  $F = F_m e^{j\varphi}$  بر طبق رابطه (۸-۱۹) و قرار دادن آن در رابطه (۸-۲۱) خواهیم داشت:

$$f(t) = \operatorname{Re}[F e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[F_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}] = F_m \operatorname{Re}[e^{j(\varphi + \omega t)}] = F_m \cos(\omega t + \varphi)$$

اما چگونه میتوان از فازورها در تعیین پاسخ خاص معادلات دیفرانسیلی که خطی و با ضرائب ثابت هستند و در طرف دوم آنها تابع سینوسی وجود دارد، استفاده کرد؟ برای پاسخ به این موضوع ابتدا به سه ویژگی قابل اثبات زیر اشاره می کنیم:

-اپراتور  $Re$  یک اپراتور خطی است یعنی اگر  $\alpha, \beta$  حقیقی باشند آنگاه:

$$\operatorname{Re}[\alpha z_1 + \beta z_2] = \alpha \operatorname{Re}(z_1) + \beta \operatorname{Re}(z_2) \quad (\mathbf{8-22})$$

-هر بار مشتق گیری از تابع زمانی  $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$  بمنزله ضرب فازور آن در " $j\omega$ " است، چرا که:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[F e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left\{ \frac{d}{dt} [F e^{j\omega t}] \right\} = \operatorname{Re}[(j\omega F) e^{j\omega t}]$$

-اگر  $A$  و  $B$  اعداد مختلط باشد و در تمام زمانهای  $t$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\operatorname{Re}[A e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[B e^{j\omega t}] \quad \forall t$$

آنگاه  $A=B$  خواهد بود.

توجه کنید که اگر  $\operatorname{Re}[A] = \operatorname{Re}[B]$  باشد آنگاه لزوماً  $A = B$  نیست.

اکنون فرض کنید معادله دیفرانسیل زیر موجود است:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\mathbf{8-23})$$

پاسخ این معادله به دو جزء همگن و خاص قابل تجزیه است. اگر ریشه های معادله مشخصه متمایز باشند آنگاه پاسخ همگن بشکل:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{S_i t}$$

نوشته می شود که  $S_i$  ریشه های معادله مشخصه یا فرکانسهای طبیعی متغیر  $y$  هستند. در صورتیکه فرض کنیم پاسخ خاص بشکل رابطه ای با فرم  $y_p(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi)$  است می توان با قرار دادن آن در معادله  $(\mathbf{8-23})$  و اتحاد طرفین،  $B_m$  و  $\theta$  را بدست آورد. اما از نکته مهمی استفاده می کنیم و آن این است که اگر پاسخ، سینوسی فرض شود آنگاه مشتقات آن، سینوسی هائی با همان فرکانس هستند و ترکیب خطی آنها نیز یک سینوس با همان فرکانس خواهد شد. اصولاً دلیل انتخاب پاسخ  $y_p(t)$  با همان فرکانس زاویه ای  $\omega$  در ورودی چنین است. در اینحالت می توان از روش ساده تری به جای قراردادن  $y_p(t) = B_m \cos(\omega t + \theta)$  در معادله نیز استفاده کرد. در طرف دوم معادله  $(\mathbf{8-23})$  می توان تابع  $A_m \cos(\omega t + \varphi)$  را به شکل زیر نوشت:

$$A_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[A e^{j\omega t}]$$

که در آن:

$$A \equiv A_m e^{j\varphi}$$

اکنون اگر قرار دهیم:

$$y_p(t) = B_m \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[B e^{j\omega t}]$$

که در آن:

$$B \equiv B_m e^{j\theta}$$

آنگاه این مقدار  $y_p(t)$  باید در معادله (۸-۲۳) صدق کند. مشتقات مراتب مختلف  $y_p(t)$  را گرفته (که بر اساس خواص اپراتور Re دیدیم که این عمل معادل با ضرب فازور نظیر در توانهای مختلفی از  $j\omega$  نیز هست) و از خاصیت خطی بودن اپراتور Re استفاده می کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{[a_0(j\omega)^n B]e^{j\omega t} + [a_1(j\omega)^{n-1} B]e^{j\omega t} + [a_2(j\omega)^{n-2} B]e^{j\omega t} + \\ & \dots + [a_{n-1}(j\omega)B]e^{j\omega t} + [a_n B]e^{j\omega t}\} = \\ & \text{Re}\{[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]Be^{j\omega t}\} \\ & = \text{Re}[Ae^{j\omega t}] \quad \forall t \end{aligned} \quad (۸-۲۴)$$

این تساوی برای همه زمانها برقرار است و لذا از خواص ذکر شده برای اپراتور Re باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]B = A$$

از آنجا که  $B = B_m e^{j\theta}$  ,  $A = A_m e^{j\varphi}$  است پس می توان  $B_m$  و  $\theta$  را بدست آورد:

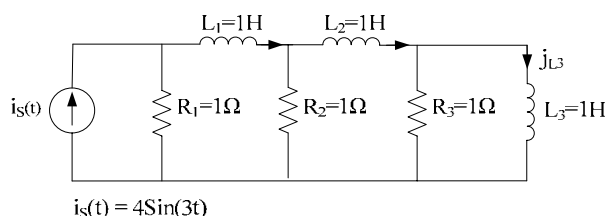
$$B = \frac{A}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n} \quad (۸-۲۵)$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{A_m}{|a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n|} \quad (۸-۲۶a)$$

$$\theta = \varphi - \angle a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n \quad (۸-۲۶b)$$

**تذکر:** اگر به مخرج کسر رابطه (8-25) توجه کنید دیده می شود که این عبارت در واقع همان طرف چپ معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (8-23) است که در آن به جای  $S$  مقدار  $j\omega$  قرار داده ایم.

مثال ۲: در مدار مقابل معادله دیفرانسیلی برای  $j_{L3}$  بدست آورید و پاسخ خاص آنرا به کمک روش فازوری بنویسید.



شکل ۸-۲ مدار مثال ۲

معادله دیفرانسیل  $j_{L3}$  را می توان بصورت زیر بدست آورد (این نکته را نشان دهید):

$$\frac{d^3 j_{L3}}{dt^3} + 5 \frac{d^2 j_{L3}}{dt^2} + 6 \frac{dj_{L3}}{dt} + j_{L3} = i_s(t) = 4 \sin(3t) = 4 \cos(3t - \pi/2) \quad (\text{A-27})$$

فرض می کنیم که پاسخ خاص  $j_{L3}(t)$  بشکل زیر باشد:

$$j_{L3P}(t) = B_m \cos(3t + \theta) = \text{Re} \left[ B e^{j\omega t} \right] \Big|_{\omega=3}$$

با توجه به روابط زیر:

$$\frac{dj_{L3P}}{dt} = \text{Re} \left[ (j3) B e^{j3t} \right], \quad \frac{d^2 j_{L3P}}{dt^2} = \text{Re} \left[ (j3)^2 B e^{j3t} \right],$$

$$\frac{d^3 j_{L3P}}{dt^3} = \text{Re} \left[ (j3)^3 B e^{j3t} \right]$$

و استفاده از معادله (A-27) داریم:

$$\left[ (j3)^3 + 5(j3)^2 + 6(j3) + 1 \right] B = 4 e^{-j\pi/2} = -4j$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$B = \frac{4j}{44 - 15j} \cong 0.08605 e^{-j1/24}$$

و لذا پاسخ خاص معادله (A-27) برابر است با:

$$y_p(t) \cong 0.08605 \cos(3t - 1/24)$$



**تذکر:** دیده می شود که این روش بسیار پر سرعت و مناسب است و می تواند پاسخ خاص معادله را به روشی جدید به دست دهد. اما ممکن است همیشه کار آمد نباشد و آن زمانی است که برابری (A-25) نتواند  $B$  را بدست دهد. از لحاظ ریاضی زمانی چنین اتفاقی می افتد که مخرج کسر این رابطه صفر شود و از لحاظ فیزیکی رخداد این حالت وقتی است که  $j\omega$  یک فرکانس طبیعی از متغیر  $y$  باشد. چرا که مخرج کسر (A-25) عملاً همان معادله مشخصه معادله دیفرانسیل (A-22) است که به جای  $S$  در آن  $j\omega$  قرار دهیم. حال فرض کنید فرکانس  $\omega$  در طرف دوم (A-22) وقتی به فرم  $j\omega$  نوشته شود یک ریشه معادله مشخصه یا فرکانس طبیعی  $y(t)$  باشد. آنگاه مخرج کسر (A-25) صفر شده و روش فازوری کارائی ندارد. در واقع در این حالت باید پاسخ خاص را بشکل ضرب  $t$  در تابع  $B \cos(\omega t + \theta)$  فرض کرد که خود اصولاً فازوری نخواهد داشت.

مثال ۳: آیا می توان برای مدار LTI با معادله دیفرانسیل متغیر  $y(t)$  که بشکل زیر است

از روش فازوری پاسخ خاص را بدست آورد؟ چرا؟



$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 3 \cos(2t + \pi/3)$$

اگر فرض کنیم  $y_p(t) = B_m \cos(2t + \theta)$  باشد در اینصورت می توان فرض کرد:

$$y_p(t) = B_m \cos(2t + \theta) = \text{Re}[B e^{j2t}]$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \text{Re}[(j2)B e^{j2t}]$$

که پس از قرار دادن در معادله خواهیم داشت:

$$[(j2)^2 + 4]B = 3e^{j\pi/3}$$

که چون ضریب  $B$  صفر نیست نمی توان  $B$  را تعیین کرد. پس روش فازوری قابل استفاده نمی باشد و پاسخ خاص را نمی توان بشکل  $B_m \cos(2t + \theta)$  فرض کرد. در چنین حالتی همانطور که در بحث معادلات دیفرانسیل دیدیم باید پاسخ خاص را بشکل زیر فرض کرده که اصولاً فازور ندارد.

$$y_p(t) = B_m t \cos(2t + \theta)$$

### ۸-۳ پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی:

با توجه به نکاتی که در بخش قبل دیدیم اکنون می توان پاسخ کامل را برای متغیری از مدار LTI که با معادله دیفرانسیلی که بشکل (۸-۲۲) توصیف می شود، تعیین نمود. اگر پاسخ به روش فازوری وجود داشته و به شکل زیر باشد:

$$y_p(t) = B_m \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}[B e^{j\omega t}] \quad (۸-۲۸)$$

و در آن،  $B$  از رابطه (۸-۲۵) بدست آید، آنگاه با فرض متمایز بودن ریشه های معادله مشخصه که بشکل زیر است:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0 \quad (۸-۲۹)$$

پاسخ کامل را می توان بصورت زیر نوشت:

$$y(t) = \left( \sum_{i=1}^n k_i e^{S_i t} \right) + B_m \cos(\omega t + \theta) \quad (۸-۲۹)$$

مثال ۴: فرض کنید معادله دیفرانسیل متغیر  $y(t)$  در یک مدار LTI بر حسب ورودی  $x(t)$  بشکل زیر است:

$$5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 2y = 3 \frac{dx}{dt} + 15x(t)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

پاسخ کامل  $y(t)$  را با فرض  $x(t) = 4 \cos(5t)$  بدست آورید.

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل بشکل زیر است :

$$5S^2 + 7S + 2 = 0 = (5S + 2)(S + 1)$$

و لذا پاسخ همگن برابر است با:

$$k_1 e^{-\frac{2}{5}t} + k_2 e^{-t}$$

از آنجا که  $x(t) = 4 \cos(5t)$  پس  $3 \frac{dx}{dt} = -60 \sin(5t)$  بوده و لذا ترکیب طرف دوم

معادله دیفرانسیل این مدار برابر است با:

$$\begin{aligned} 3 \frac{dx}{dt} = x(t) &= -60 \sin(5t) + 60 \cos(5t) \\ &= 60 [\cos(5t) - \sin(5t)] = 60\sqrt{2} \cos(5t + \pi/4) \end{aligned}$$

پس پاسخ خاص نیز برابر است با:

$$y_p(t) \cong 0/664 \cos(5t - 119/1^0)$$

و لذا پاسخ کامل برابر خواهد بود با:

$$y(t) = k_1 e^{-\frac{2}{5}t} + k_2 e^{-t} + 0/664 \cos(5t - 119/1^0)$$

که با اعمال شرائط مرزی داریم:

$$y(t) \cong 1/504 e^{-\frac{2}{5}t} - 1/181 e^{-t} + 0/664 \cos(5t - 119/1^0)$$

**تذکره:** گاهی در مدارات ساده این اتفاق رخ می دهد که با انتخاب شرائط اولیه مناسب می توان پاسخ گذرا حذف کرد (ضرائب نظیر به آنرا صفر نمود). در این حالت پاسخ حالت دائمی از ابتدا همان جمله سینوسی است که از روش فازوری بدست آمده بود. توجه کنید که در این انتخاب برای حالت اولیه، برقراری شرط پیوستگی ولتاژخازن و جریان سلف ضروری است چرا که نمی توان جریان اولیه را برای یک سلف طوری اختیار کرد که حالت گذرا حذف شود ولی در عوض در پاسخ خروجی، که می تواند جریان سلف باشد، برای همان لحظه  $t = 0$  جریانش را غیر از آنچه اختیار شده بدست آورد. همین نکته را در رابطه با ولتاژ خازن نیز خواهیم داشت.

### ۸-۳-۱ بررسی بیشتر پاسخ حالت دائمی سینوسی:

در رابطه با تحریک یک مدار LTI، وقتی که توسط منبع به فرم سینوسی صورت گیرد، آنچه حائز اهمیت است وجود پاسخ حالت دائمی سینوسی است. بدین معنی که مدار توسط یک محرک با تابع سینوسی تحریک می شود، اما آیا میتوان برای یک خروجی خاص تابع حالت دائمی سینوسی را مشاهده نمود یا خیر؟ و اصولاً خروجی چگونه خواهد بود؟

پاسخ به این سؤال بر اساس درک از رفتار معادله (۸-۲۲) است. فرض کنید بخواهیم پاسخ کلی این معادله را تعیین کنیم. در اینصورت مادامی که معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را بشکل زیر تعیین کرده:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0$$

و برای آن (مثلاً مقادیر متمایز) فرکانسهای طبیعی  $S_1$  تا  $S_n$  را مشخص نمائیم، می توان به کمک روش فازوری پاسخ خاصی مثل  $B_m \cos(\omega t + \theta)$  را بیابیم. لذا پاسخ عمومی معادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$y(t) = \left( \sum_{i=1}^n k_i e^{S_i t} \right) + B_m \cos(\omega t + \theta) \quad (۸-۳۱)$$

اکنون جهت داشتن پاسخ حالت دائمی میتوان حالات زیر را در نظر گرفت:

#### **الف) کلیه فرکانسهای طبیعی در طرف چپ صفحه مختلط (LHP) واقع شده اند.**

تحت این شرایط اگر پاسخ خاص به روش فازوری موجود باشد، کلیه کمیتهای  $e^{S_i t}$  در پاسخ  $y(t)$  پس از دراز مدت صفر می شوند (مدار در حالت میراست) و بنابراین پاسخ حالت دائمی بشکل  $B_m \cos(\omega t + \theta)$  بوده که پاسخ حالت دائمی سینوسی نیز نام دارد. بعلاوه توجه کنید که با توجه به نتایجی که از رابطه (۸-۲۵) دیدیم، اصولاً پاسخ خاص، با روش فازوری، زمانی موجود نیست که  $\omega$  تحریک کننده مدار [طرف راست رابطه (۸-۲۲)]، وقتی همگی در  $j \pm$  ضرب می شود، ریشه معادله مشخصه متغیر مدار باشد. در این حالت چون ریشه ها همگی در LHP هستند، طبیعی است که نمی توانند  $\pm j\omega$  باشند چرا که این ریشه، ریشه ای واقع بر محور موهومی است. پس با اطمینان می توان ادعا کرد که تحت چنین شرایطی اولاً پاسخ خاص به روش فازوری حتماً وجود دارد و ثانیاً این پاسخ همان پاسخ حالت دائمی سینوسی مدار است. چنین مداری را به اصطلاح مدار پایدار نیز می نامیم. پس:

**"یک مدار پایدار دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی است."**

#### **ب) بعضی از فرکانسهای طبیعی در طرف راست صفحه مختلط (RHP) و مابقی در طرف چپ صفحه مختلط (LHP) واقع شده اند.**

در این حالت مجدداً پاسخ خاص به روش فازوری وجود دارد (چرا؟)، اما به دلیل وجود حداقل یک فرکانس طبیعی در طرف راست، با گذر زمان جمله نظیر به این فرکانس، در پاسخ (۸-۳۱)، به سمت بی نهایت میل می کند. چنین مداری پایدار نیست و پاسخ حالت دائمی ندارد.

### ج) بعضی از فرکانسهای طبیعی در طرف چپ صفحه مختلط و بعضی روی محور مختلط واقعند (تکراری یا غیر تکراری).

اگر فرکانسهای طبیعی در LHP باشند جملات نظیر به آنها در پاسخ، دارای حد صفر است چرا که می توان نشان داد اگر یک  $S_k$  در صفحه مختلط در نیمه چپ آن واقع شود  $[\text{Re}(S_k) < 0]$  آنگاه حد زیر برقرار است:

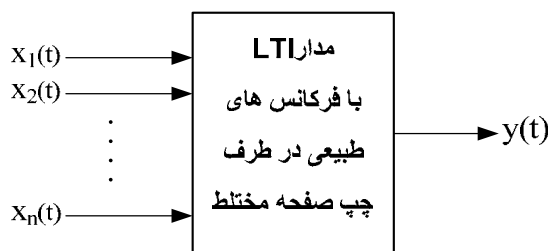
$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^l e^{S_k t} = 0 \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

اگر فرکانس طبیعی خاص روی محور موهومی واقع شود پس قسمت حقیقی آن صفر بوده و در رابطه (۸-۲۱) درون کרוشه بصورت سینوسی ظاهر می شود. بعلاوه توجه کنید که اگر این فرکانس طبیعی، که می توان با فرض واقع شدن روی محور موهومی آنرا به شکل  $j\omega_0$  نشان داد، تکراری نباشد پاسخ نظیر به جملات درون پرانتز رابطه (۸-۲۱) دارای حد هستند، چرا که بیانگر تابع  $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  خواهند بود. لیکن اگر این ریشه یا فرکانس طبیعی تکراری شود آنگاه پاسخ نظیر، به شکل  $t^l \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  است که دارای حد برای  $t$  بزرگ نیست. پس می توان نتیجه گرفت که اگر فرکانسهای طبیعی روی محور موهومی واقع شوند پاسخ حالت دائمی در صورتی که این فرکانسها تکراری باشند وجود ندارد. بعلاوه در رابطه با پاسخ خاص منتج از روش فازوری، اگر  $\omega$  تحریک کننده مدار با یک فرکانس طبیعی موجود روی موهومی، حتی اگر تکراری نیز نباشد، یکسان گردد، آنگاه مخرج رابطه (۸-۲۵) صفر خواهد شد. لذا پاسخ حالت دائمی مجددا وجود ندارد چرا که باید پاسخ خاص را به شکل  $B_m t \cos(\omega_0 t + \theta)$  فرض کرد.

پس نتیجه می گیریم که اگر یک فرکانس طبیعی مدار روی محور موهومی واقع شود، تنها زمانی می توان پاسخ حالت دائمی سینوسی داشت که اولاً فرکانس طبیعی مورد نظر تکراری نباشد ثانیاً معادل با  $j\omega$  که فرکانس تحریک ورودی است، نگردد.

### ۸-۳-۲ جمع آثار در حالت دائمی سینوسی:

فرض کنید که یک مدار LTI مطابق بلوک دیاگرام مقابل وجود دارد بطوریکه فرکانسهای طبیعی کلیه محرکهای موجود درون آن، در طرف چپ صفحه مختلط واقع شده اند و مدار باصطلاح پایدار است. اگر معادله دیفرانسیل حاکم بر این مدار بشکل رابطه (۷-۲۵) باشد، می توان خاصیت جمع آثار را برای یافتن پاسخ خاص به روش فازوری اعمال نمود، وقتی که تنها یک ورودی مدار را تحریک کند. در این حالت فرض بر آنست که ابتدا تنها ورودی  $x_1(t)$  به مدار اعمال شده و ورودیهای  $x_2(t)$ ،  $x_3(t)$  و ... را نداشته باشیم. بدین معنی که با توجه به آنچه در فصل قبل دیدیم وجود ورودیهای که بشکل ترکیب خطی باشند، می توانند پاسخهایی را نتیجه دهند که خود ترکیب خطی متناظری از ورودیها هستند. این نکته بخصوص برای حالتی که بیش از یک ورودی سینوسی با فرکانسهای مختلف، مدار را تحریک می کنند اهمیت ویژه ای دارد.



شکل 8-3 تشریح خاصیت جمع آثار در مدار LTI

بعنوان مثال فرض کنید که مدار شکل ۸-۳ تنها با ورودی

$$x_1(t) = A_{m_1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

تحریک شود. پاسخی که بر این معادله حاکم است می تواند از جای گذاری  $x_1(t)$  در طرف دوم رابطه (۷-۲۵) و سپس سازه سازی آن بدست آید. اما می دانیم که وقتی از یک تابع سینوسی مشتق می گیریم تنها می توان دامنه و فاز آنرا تغییر یافته پنداشت چرا که مثلا برای  $x_1(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_{m_1} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ &= (A_{m_1} \omega_1) \cos\left[\omega_1 t + \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

از طرف دیگر ترکیبی از سینوسی های با دامنه و فاز متفاوت، مجددا یک سینوسی با دامنه و فازی جدید است ولی با همان فرکانس. به این ترتیب در طرف دوم رابطه (۷-۲۵) مجددا به یک سینوسی با دامنه و فاز جدید ولی با همان فرکانس  $\omega_1$  بشکل زیر خواهیم رسید که ترکیب مشتقات با ضرائب متفاوت در طرف راست رابطه (۷-۲۵) است:

$$b_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_1}{dt} + b_m x_1 = A'_{m_1} \cos(\omega_1 t + \varphi'_1)$$

پس پاسخ خاص  $y_1$  نظر به این ورودی  $x_1$  را می توان [مشروط بر آنکه  $j\omega_1$  ریشه معادله مشخصه رابطه (۷-۲۵) نباشد] به روش فازوری و از رابطه (۸-۲۵) یا (۸-۲۶) بدست آورد. اکنون فرض کنید ورودی دومی مثل  $x_2(t)$  به صورت زیر نیز به مدار شکل ۸-۳ اعمال شود:

$$x_2(t) = A_{m_2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

با استدلالی مشابه استدلال مربوط به ورودی  $x_1(t)$ ، می توان مجددا مقدار پاسخ خاص نظیر به این ورودی را نیز از معادله (۸-۲۵) بدست آورد و این در واقع جمع آثار مربوط به ورودیهای  $x_1(t)$ ،  $x_2(t)$  است. در تعمیم این موضوع، میتوان دریافت که اگر حتی مدار شکل ۸-۳ با مقدار دلخواه  $n$  ورودی با فرکانسهای مختلف تحریک شود، مشروط بر وجود پاسخ خاص به روش فازوری برای هر یک از ورودیها میتوان این پاسخها را بصورت کاملا مجزا و مستقل از یکدیگر و به کمک روند منجر شده به معادله (۸-۲۵) بدست آورد.

#### 8-4 مفاهیم امپدانس و ادمیتانس:

یکی از مزایای فازورها می تواند کاربرد آنها در تعیین پاسخ خاص معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار LTI (و یا احیانا پاسخ حالت دائم سینوسی آن) تنها با روش ساده ای باشد که درون آن فقط اعمال ساده جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد مختلط وجود داشته و اثری از حل معادلات دیفرانسیل نیست. این تبدیل معادلات دیفرانسیل به روابط ساده ریاضی، می تواند در بررسی عناصر مداری نیز اثر مهمی داشته باشد. بدین معنی که بویژه در عناصری مثل خازن و سلف، که مشتقات مربوط به ولتاژ یا جریان وجود دارند، امکان جایگزینی این مشتقات با روابط ساده وجود دارد. همانطوریکه تا حدودی در بخش قبل ذکر گردید این نوع کاربردها ویژه تحریکهائی صرفا سینوسی شکل است بطوریکه بتوان برای آنها فازور تعریف کرد. به منظور بررسی دقیقتر موضوع، می توان عناصر مختلف مداری را به شکل زیر در بحث فازورها وقتی که توسط سینوسها تحریک می شوند، دسته بندی و بحث نمود.

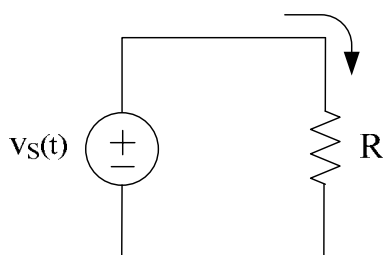
**۱- مقاومت:** اگر مقاومت خطی و تغییر ناپذیر با زمان  $R$  موجود باشد از آنجا که ارتباط ولتاژ و جریان آن برابر است با

$$v_R(t) = Rj_R(t)$$

در اینصورت مشروط بر آنکه ولتاژ (یا جریان) مقاومت را بتوان بشکل سینوسی نوشت، آنگاه جریان (یا ولتاژ) چنین مقاومتی تنها با ضرب یک عدد ثابت در یک تابع سینوسی بدست می آید که مجددا خود یک سینوسی با همان فرکانس و فاز، اما با دامنه متفاوتی است. مثلا فرض کنید مطابق شکل ۸-۴ مقاومت خطی و تغییر ناپذیر با زمان  $R$  توسط منبع ولتاژ سینوسی برابر با  $v_R(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$  تحریک شود. در اینصورت

$$j_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \left(\frac{V_m}{R}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

و لذا گفته می شود که مقاومت عنصری است که ولتاژ و جریان آن هم فازند.



شکل ۸-۴ توصیف ولتاژ و جریان یک مقاومت LTI

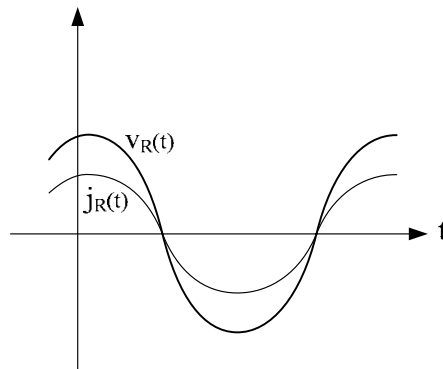
با توجه به شکل ۸-۵ می توان ترسیم ولتاژ و جریان چنین عنصری را با دو تابع سینوسی هم فاز ارائه نمود.

در رابطه با فازورهای ولتاژ و جریان این مقاومت، می توان فازور ولتاژ آنرا بشکل  $V_m e^{j\varphi}$  فرض کرد. پس فازور جریان آن برابر خواهد بود با:

$$J_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_m e^{j\varphi}}{R} = \left(\frac{V_m}{R}\right) e^{j\varphi} \quad (۸-۲۲)$$

یعنی فازور ولتاژ و جریان یک مقاومت در رابطه ساده زیر صادقند:

$$V_R = R J_R \quad (۸-۲۳)$$



شکل ۸-۵ نمایش ولتاژ و جریان سینوسی تحریک کننده یک مقاومت LTI

که این رابطه به واقع همان رابطه:

$$v_R(t) = R j_R(t)$$

بوده که در آن، تنها توابع زمانی، به فازور تبدیل شده اند.

**۲- خازن:** اگر خازن خطی و تغییر ناپذیر با زمان  $C$  موجود باشد، در اینصورت جریان این خازن و ولتاژ آن در رابطه زیر صادقند:

$$j_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

لذا اگر ولتاژ خازن را بصورت یک سینوسی بشکل زیر تغییر دهیم:

$$j_C(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

آنگاه برای جریان این خازن داریم:

$$j_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{d}{dt} [V_m \cos(\omega t + \varphi)]$$

$$= -C\omega V_m \sin(\omega t + \varphi) = (C\omega V_m) \cos\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

دیده می شود که جریان چنین

$$\Rightarrow j_C(t) = (C\omega V_m) \cos\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

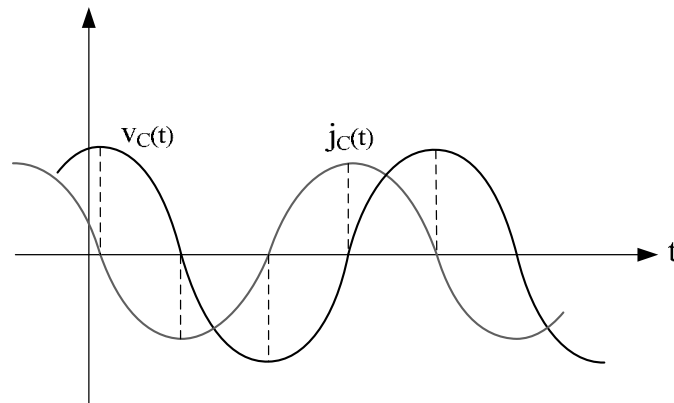
از ولتاژ آن جلوتر است. یک ترسیم مثالی از ولتاژ و جریان خازن در  $\frac{\pi}{2} \equiv 90^\circ$  خازنی به اندازه

چنین تحریکی به شکل ۸-۶ است. ارتباط فازورهای ولتاژ و جریان این خازن نیز می تواند به شکل زیر باشد:

$$V_C = V_m e^{j\varphi}$$

$$j_C = C\omega V_m e^{j(\varphi+\pi/2)} = C\omega V_m e^{j\varphi} \times \underbrace{e^{j\pi/2}}_j \quad (۸-۲۴)$$

$$\Rightarrow j_C = (j\omega C) \underbrace{V_m e^{j\varphi}}_{V_C} = (j\omega C)V_C$$



شکل ۸-۶ نمایش ولتاژ و جریان سینوسی تحریک کننده یک خازن LTI

توجه کنید که در نقاط ماکزیمم ولتاژ، جریان می نیمم بوده و در نقاط می نیمم ولتاژ، جریان حداکثر است. لذا رابطه فازور ولتاژ و جریان یک خازن بشکل کلی زیر است:

$$V_C = \left( \frac{1}{j\omega C} \right) J_C \quad \text{or} \quad J_C = (j\omega C)V_C \quad (۸-۲۴)$$

پس آنچنان که انتظار می رفت باید توصیف دیفرانسیلی نمایش یک خازن بشکل رابطه ساده ای در دامنه فازوری نوشته شود که در آن مشتق گیری نسبت به زمان با "  $j\omega$  " جایگزین شده است. البته این نکته جدیدی نیست چرا که قبلا در بحث تعیین پاسخ خاص یک معادله دیفرانسیل با تحریک سینوسی به روش فازوری، آنرا دیده بودیم.

**۳- سلف:** اگر سلف خطی و تغییر ناپذیر با زمان  $L$  موجود باشد، در اینصورت ولتاژ این سلف و جریان آن در رابطه زیر صادقند:

$$V_L(t) = L \frac{dj_L}{dt}$$

لذا اگر جریان سلف را بصورت یک سینوسی بشکل زیر تغییر دهیم:

$$j_L(t) = J_m \cos(\omega t + \varphi)$$

آنگاه برای ولتاژ این سلف داریم:



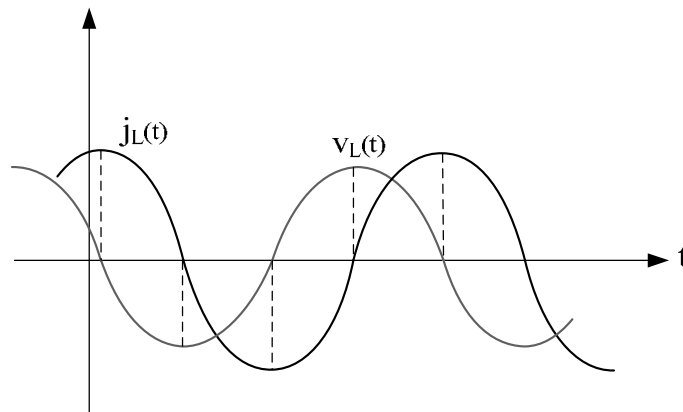
$$\begin{aligned}
 V_L(t) &= L \frac{dj_L}{dt} = L \frac{d}{dt} [J_m \cos(\omega t + \varphi)] \\
 &= -L\omega J_m \sin(\omega t + \varphi) = (L\omega J_m) \cos\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
 V_L(t) &= (L\omega J_m) \cos\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

دیده می شود که ولتاژ چنین سلفی به اندازه  $\frac{\pi}{2} \equiv 90^\circ$  از جریان آن جلوتر است. ترسیمی

مثالی از جریان و ولتاژ سلف در چنین تحریکی بشکل ۸-۷ است.

ارتباط فازورهای ولتاژ و جریان این سلف می تواند بشکل زیر باشد:

$$\begin{aligned}
 J_L &= J_m e^{j\varphi} \\
 V_L &= L\omega J_m e^{j(\varphi + \pi/2)} \\
 &= L\omega J_m e^{j\varphi} \times \underbrace{e^{j\pi/2}}_j \quad \quad \quad (۸-۲۶) \\
 \Rightarrow V_L &= (j\omega L) \underbrace{J_m e^{j\varphi}}_{J_L} = (j\omega L) J_L
 \end{aligned}$$



شکل ۸-۷ نمایش ولتاژ و جریان سینوس تحریک کننده یک سلف LTI

توجه کنید که در نقاط ماکزیمم جریان، ولتاژ می نیمم بوده و در نقاط می نیمم جریان، ولتاژ حداکثر است. لذا رابطه فازور جریان و ولتاژ یک سلف به شکل کلی زیر است:

$$J_L = \left( \frac{1}{j\omega L} \right) V_L \quad \quad \quad \text{or} \quad \quad \quad V_L = (j\omega L) J_L \quad \quad \quad (۸-۲۷)$$

پس مجدداً آنچنان که انتظار می رفت باید توصیف دیفرانسیلی نمایش یک سلف به شکل رابطه ساده ای در دامنه فازوری نوشته شود که طبعاً مشتق گیری نسبت به زمان مجدداً با "  $j\omega$  " جایگزین شده است.

**۳- سلفهای تزویجی:** فرض کنید مجموعه ای از سلفهای تزویج شده خطی و تغییر ناپذیر با زمان موجود است که ماتریس توصیف کننده آنها به شکل زیر است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & \dots & L_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (8-28)$$

لذا اگر جریان درون هر یک از سلفها را به شکل سینوسی زیر تغییر دهیم:

$$\mathbf{j}_L(t) = \begin{bmatrix} J_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ J_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \vdots \\ J_{mn} \cos(\omega t + \varphi_n) \end{bmatrix} \quad (8-29)$$

آنگاه برای ولتاژ این مجموعه سلفی داریم:

$$\mathbf{v}_L(t) = \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{j}_L(t) \quad (8-40)$$

با توجه به توصیف مشتق در دامنه فازوری، رابطه (8-40) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{V}_L = j\omega \mathbf{L} \mathbf{J}_L \quad (8-41)$$

و یا عبارت دیگر:

$$\mathbf{J}_L = (j\omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{V}_L \quad (8-42)$$

که در آن منظور از  $\mathbf{L}^{-1}$  همان ماتریس معکوس  $\mathbf{L}$ ، یعنی ماتریس ضرائب القا است.

**تذکر:** توجه کنید که در بحث فازوری و اصولا هنگامی که با ورودیهای سینوسی و پاسخ حالت دائمی سینوسی سروکار داریم صحبتی از شرائط اولیه، روی عناصر ذخیره کننده انرژی یعنی خازن و سلف بمیان نمی آوریم. علت این نکته چنین است که شرائط اولیه، در تعیین ضرائب مربوط به پاسخ معادله دیفرانسیل همگن خود را نشان می دهند و پاسخ نظیر به ورودی سینوسی که از روش فازوری بدست می آید، اصولا ربطی به شرائط اولیه ندارد [رابطه (8-41)]. پس یک نکته کاملا کلی در بررسی پاسخ حالت دائمی مدار LTI که فرکانسهای طبیعی متغییر مورد نظر آن همگی در طرف چپ صفحه مختلط واقع شده اند و توسط یک ورودی سینوسی تحریک میشود، آنست که:

**پاسخ حالت دائمی سینوسی این مدار مستقل از شرائط اولیه موجود در آن است.**

#### 8-4-1 مفهوم امپدانس و ادیتانس:

به روابط (8-22)، (8-25) و (8-27) که بمنظور سهولت مجددا آورده شده اند، توجه کنید:

$$V_R = (R)J_R \quad \text{or} \quad J_R = \left(\frac{1}{R}\right)V_R \quad (8-22)$$

$$V_C = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)J_C \quad \text{or} \quad J_C = (j\omega C)V_C \quad (8-25)$$

$$V_L = (j\omega L)J_L \quad \text{or} \quad J_L = \left(\frac{1}{j\omega L}\right)V_L \quad (8-27)$$

در دامنه فازوری هر یک عناصر مقاومت، خازن و سلف می توانند مشابه با یکدیگر باشند چرا که از روابط دیفرانسیلی اثری نیست. اما در رابطه با خازنها و سلفها تنها اثر  $\omega$  در روابط فازوری دیده می شود، پارامتری که لازم بود آنها در محاسبات فازوری علیرغم حضور صریحش، از قلم نیاندازیم. لذا به منظور آنکه بتوان هر سه عنصر را مشابه با یک دید کلی بررسی کرد، دیدی که در هر سه عنصر، ولتاژ (یا جریان) را ضربی از جریان (یا ولتاژ) در دامنه فازوری می داند، پارامترهای زیر را تعریف می کنیم:

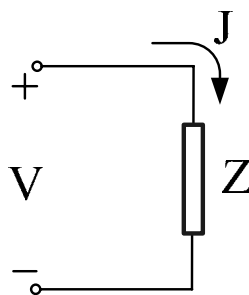
### الف) امپدانس یک عنصر

اگر مطابق شکل 8-8 عنصر دلخواهی (مقاومت، خازن یا سلف) موجود باشد که ولتاژ دو سر آن دارای فرم فازوری  $V$  و جریان عبوری از آن دارای توصیف فازوری  $J$  باشد، آنگاه امپدانس چنین عنصری را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$Z \equiv \frac{V}{J} = \frac{\text{فازور ولتاژ دو سر عنصر}}{\text{فازور جریان عبوری از عنصر}}$$

(8-22)

بدیهی است که امپدانس مقاومت همان  $R$ ، خازن مقدار  $\frac{1}{j\omega C}$  و سلف مقدار  $j\omega L$  خواهد بود.



شکل 8-8 نمایش توصیف کلی امپدانس یا ادمیتانس

توجه کنید که مفهوم امپدانس در دامنه فازوری همان مقاومت در دامنه زمانی است، اما این مفهوم برای خازن و سلف با مقادیری تابع فرکانس و به شکل موهومی محض نوشته می شود. بعلاوه واحد همه آنها اهم است.

### ب) ادمیتانس یک عنصر

اگر مطابق شکل ۸-۸ عنصر دلخواهی با فازور ولتاژ  $V$  و فازور جریان  $J$  موجود باشد، آنگاه ادمیتانس چنین عنصری را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$Y \equiv \frac{J}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{\text{فازور جریان عبوری از عنصر}}{\text{فازور ولتاژ دو سر عنصر}} \quad (۸-۴۴)$$

مجددا ادمیتانس مقاومت  $G = \frac{1}{R}$ ، خازن مقدار  $j\omega C$  و سلف مقدار  $\frac{1}{j\omega L}$  خواهد بود. همچنین

توجه کنید که مفهوم ادمیتانس در دامنه فازوری، همان رسانائی در دامنه زمانی است. اما این مفهوم برای خازن و سلف با مقادیری تابع فرکانس و به شکل موهومی محض نوشته می شود و دارای واحد مهو (mho) است. بعلاوه ادمیتانس، (معکوس و در واقع) دوگان امپدانس است چرا که بر اساس رابطه (۸-۴۴) عکس آن می باشد.

جدول ۸-۱ خلاصه مطالب فوق در رابطه با سه عنصر مورد بحث است.

عنصر	امپدانس $Z$ اهم ( $\Omega$ )	ادمیتانس $Y$ مهو ( $\cup$ )
مقاومت	$R$	$G = \frac{1}{R}$
خازن	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$j\omega C$
سلف	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$

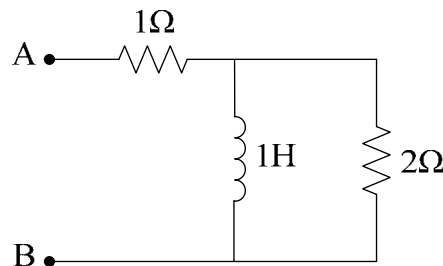
جدول ۸-۱ خلاصه نمایش امپدانس و ادمیتانس عناصر

**تذکره:** با توجه به مطالب جدول ۸-۱ توجه کنید که اگر امپدانسی دارای مقدار حقیقی باشد، آنگاه آن امپدانس وابسته به یک مقاومت در دامنه زمانی بوده است. به همین ترتیب اگر امپدانس مورد نظر دارای ضربی مثبت از  $j$  باشد، عنصر متناظر خازن است. دوگان این مطلب در رابطه با ادمیتانس نیز صادق است. بدین معنی که اگر ادمیتانس ضربی مثبت از  $j$  باشد، عنصر نظیر دامنه زمانی آن، خازن و اگر ضربی منفی باشد، آن عنصر سلف است.

## ۸-۴-۲ ترکیب امپدانس - ادمیتانس، امپدانس و ادمیتانس نقطه تحریک:

با توجه به مطالب ذکر شده آنچه استنباط می شود این است که اگر مداری در حالت دائمی سینوسی باشد، میتوان خازن و سلف موجود در آنرا مثل مقاومت (البته با مقادیری موهومی) در دامنه فرکانسی فرض کرد. لذا ترکیب آنها نیز شبیه به مقاومتها خواهد بود. مثلا ترکیب سری دو امپدانس معادل با جمع امپدانس آنها ست یا ترکیب موازی دو ادیمیتانس، جمع آنهاست.

مثال ۵ : امپدانس معادل ترکیب عناصر شکل زیر را در دامنه فازوری بدست آورید. فرض کنید فرکانسی که این عناصر را تحریک بصورت ولتاژ یا جریان می کنیم،  $\omega = 2$  رادیان بر ثانیه باشد.

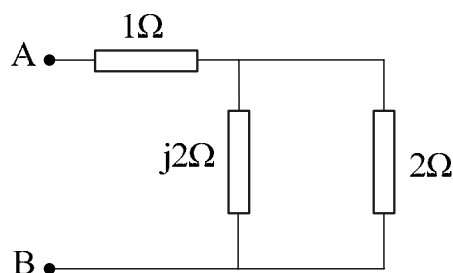


شکل ۸-۹ ترکیب عناصر غیر همجنس در دامنه فازوری

اگر به جدول ۸-۱ مراجعه کنیم، دیده می شود که مقاومتها همان مقادیر دامنه زمانی خود را دارند ولی سلف دارای امپدانس (یا مقاومت مختلط) معادل با مقدار:

$$Z_L = j\omega L = j2 \times 1 = j2\Omega$$

است. (البته اگر امپدانس عنصری را به میزان  $j2\Omega$  داشتیم می توانستیم حدس بزنیم که این عنصر باید سلف باشد چرا که **امپدانس** آن ضرب **مثبتی** از  $j$  است) مدار معادل فازوری شکل ۸-۹ در شکل ۸-۱۰ ترسیم شده است.



شکل ۸-۱۰ مدار معادل فازوری شکل ۸-۹

در این شکل ترکیبی از مقاومتهای مختلط را داریم که میتوان برای یافتن امپدانس معادل دیده شده از سری های  $A$  و  $B$  شبیه به ترکیب مقاومتها، آنها را با هم تلفیق نمود. مثلا ترکیب موازی دو امپدانس (مقاومت مختلط)  $2$  اهمی و  $j2$  اهمی برابر است با:

$$Z_1 = \frac{2 \times j2}{2 + j2} = \frac{2j}{1 + j} = 1 + j\Omega$$

این امپدانس وقتی در ترکیب سری با امپدانس ۱ اهمی قرار گیرد امپدانس کل دیده شده از سری های A و B برابر خواهد بود با:

$$Z_{AB}(j2) = 1 + (1 + j) = 2 + j\Omega \quad (۸-۴۵)$$

**تذکر:** توجه کنید امپدانس معادل، امپدانس ترکیبی از عناصر مختلفی در همان فرکانس است. مثلاً امپدانس معادل  $2 + j\Omega$  که در رابطه (۸-۴۵) محاسبه گردید، می تواند از ترکیب سری مقاومت ۲ اهمی و یک سلف  $\frac{1}{2}H$  تشکیل شود (چرا؟). پس فرآیند ترسیم مدار از روی امپدانس معادل (سنتز مدار) نتیجه منحصر بفردی نمی دهد و می تواند دارای پاسخهای بی شماری باشد. ولی توجه کنید که همگی در همان فرکانس  $\omega$  بحث می شوند چرا که خازن و سلف امپدانس (یا ادمیتانس) تابع  $\omega$  دارند.

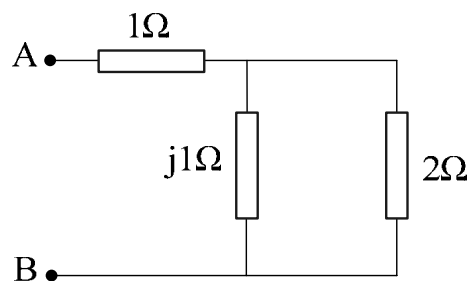
مثال ۶: امپدانس ترکیب عناصر مثال قبل در فرکانس  $\omega = 1 \frac{rd}{sec}$  چقدر است؟

با توجه به وابستگی امپدانس سلف (همچنین خازن که البته در این مثال وجود ندارد) به فرکانس، پس امپدانس کل در این حالت لزوماً مقدار مثال قبل یعنی  $2 + j\Omega$  نیست. در واقع امپدانس مقاومتها عوض نمی شود، اما امپدانس سلف در تحریک توسط منبعی با  $\omega = 1 \frac{rd}{sec}$  برابر است با:

$$Z_L = j\omega L = j \times 1 \times 1 = j\Omega$$

پس مدار معادل به شکل ۸-۱۱ ترسیم شده و امپدانس دیده شده از سرهای A و B برابر است با:

$$Z_{AB}(j1) = 1/4 + j 0/8 \quad (۸-۴۶)$$



شکل ۸-۱۱ مدار معادل شکل ۸-۹ در فرکانس  $\omega = 1 \frac{rd}{sec}$

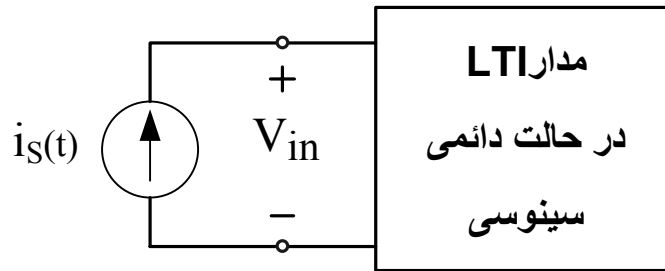
توجه کنید که امپدانس دیده شده از سرهای  $A$  و  $B$  در دو مثال فوق که در روابط (۸-۴۵) و (۸-۴۶) نوشته شده اند، با آرگومانهای  $j\omega$  هستند که در رابطه اول  $\omega = 2$  و در رابطه دوم  $\omega = 1$  است.

**تعریف: امپدانس نقطه تحریک** اکنون که دیدیم ترکیب امپدانسها و ادمیتانسها، خود می تواند در دامنه فازوری بعنوان یک امپدانس یا ادمیتانس جدید مطرح شود، فرض کنید مطابق شکل ۸-۱۲ یک مدار LTI داریم که توسط منبع جریان سینوسی زیر تحریک می شود:

$$i_s(t) = I_{ms} \cos(\omega t + \varphi_s) = \text{Re}[I_s e^{j\omega t}] = \text{Re}[(I_{ms} e^{j\varphi_s}) e^{j\omega t}] \quad (۸-۴۷)$$

و در واقع فازور منبع را به شکل زیر تعریف کرده ایم:

$$I_s \equiv I_{ms} e^{j\varphi_s} \quad (۸-۴۸)$$



شکل ۸-۱۲ تحریک یک مدار LTI و ایجاد حالت دائمی سینوسی توسط

منبع جریان  $i_s(t)$  جهت تعریف امپدانس نقطه تحریک

مدار در حالت دائمی سینوسی است و منبع در مقابل خود ولتاژی را می بیند که معادل با نوشتن به شکل زیر است:

$$v_{in}(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_{in}) = \text{Re}[V_{in} e^{j\omega t}] = \text{Re}[(V_m e^{j\varphi_{in}}) e^{j\omega t}] \quad (۸-۴۹)$$

و فازور ولتاژ دو سر مدار در آن به شکل زیر تعریف شده است:

$$V_{in} \equiv V_m e^{j\varphi_{in}} \quad (۸-۵۰)$$

اکنون منبع، امپدانس را در مقابل خود مشاهده می کند که آنرا **امپدانس نقطه تحریک** نامیده و به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$Z_{D.P.}(j\omega) \equiv \frac{V_{in}(j\omega)}{I_s(j\omega)} \quad (۸-۵۱)$$

توجه کنید که این امپدانس در حالت کلی (به دلیل وجود خازن و سلف درون مدار) تابع  $\omega$  بوده و لذا آنرا با آرگومان  $j\omega$  نشان می دهیم.

**تعریف: ادمیتانس نقطه تحریک** همان مدار شکل ۸-۱۲ را در نظر بگیرید که توسط منبع

ولتاژی شبیه به شکل ۸-۱۲ تحریک می شود. اگر فرض کنیم که ولتاژ منبع بصورت زیر است:

$$e_s(t) = E_{ms} \cos(\omega t + \varphi_s) = \text{Re}[E_s e^{j\omega t}] = \text{Re}[(E_{ms} e^{j\varphi_s}) e^{j\omega t}] \quad (۸-۵۲)$$

با فازور منبع ولتاژ:

$$E_s \equiv E_{ms} e^{j\varphi_s}$$

اگر جریان وارد شده به مدار (عبوری از منبع ولتاژ) برابر باشد با:

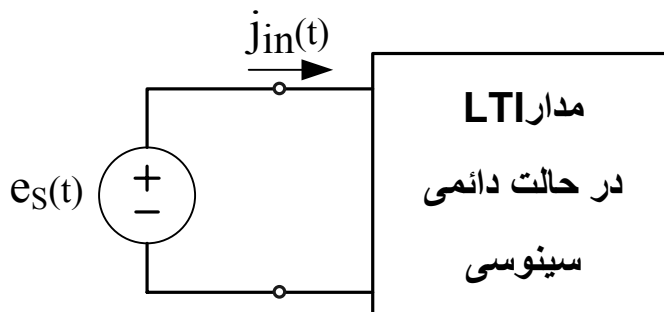
$$j_{in}(t) = J_m \cos(\omega t + \varphi_{in}) = \text{Re}[J_{in} e^{j\omega t}] = \text{Re}[(J_m e^{j\varphi_{in}}) e^{j\omega t}] \quad (۸-۵۳)$$

با فازور جریانی:

$$J_{in} \equiv J_m e^{j\varphi_{in}}$$

آنگاه منبع، ادمیتانسی را در مقابل خود مشاهده می کند که آنرا ادمیتانس نقطه تحریک نامیده و به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$Y_{D.P.}(j\omega) = \frac{1}{Z_{D.P.}(j\omega)} \equiv \frac{J_{in}(j\omega)}{E_s(j\omega)} \quad (۸-۵۴)$$



شکل ۸-۱۲ تحریک یک مدار LTI و ایجاد حالت دائمی سینوس توسط منبع ولتاژ  $e_s(t)$  جهت تعریف ادمیتانس نقطه تحریک

## ۸-۵ آنالیز مدارهای LTI در حالت دائمی سینوسی:

در این بخش می خواهیم آنچه را که در بخشهای قبلی دیدیم با یکدیگر ترکیب نموده و مداری را بحث کنیم که در حالت دائمی سینوسی قرار گرفته است اما در این روش آنالیز، از معادلات دیفرانسیل (یا در حالت کلی انتگرال-دیفرانسیل) نیست. بدین معنی که اگر قرار باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مدار LTI را به روشی که منجر به معادله (۸-۲۵) شد تعیین کنیم و اصولاً بدون حل معادلات دیفرانسیل از طریق وارد کردن مفاهیم امپدانس و ادمیتانس به حل مساله

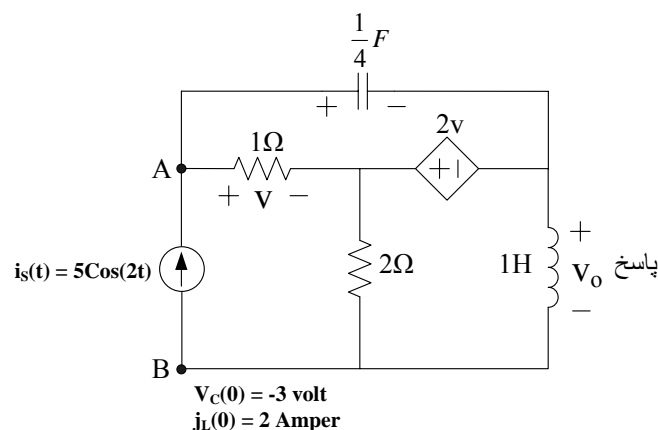


برسیم، پس توانسته ایم روش ساده ای را بکار گیریم. اما در بکارگیری این روش آنچه مهم است توجه به نکات زیر است:

- فرکانسهای طبیعی متغیرهای مدار مورد نظر همگی در سمت چپ صفحه مختلط واقع اند و لذا محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی از طریق روش فازوری امکان پذیر است،

- کلیه شرایط اولیه قابل بحث نیستند (چرا که آنها مستقیماً روی ضرائب مربوط به جزء گذرای پاسخ، اثر می گذارند و می توان در این پاسخ همه آنها را صفر فرض کرد. قبل از توصیف روش به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷: پاسخ حالت دائمی سینوسی مدار شکل زیر را بدست آورید.



شکل 8-14 مدار مثال ۷

از آنجا که پاسخ، ولتاژ دو سر سلف، یعنی  $v_0$ ، است بایستی سعی کنیم که معادله دیفرانسیلی برای  $v_0$  بدست آوریم. اگر این عمل صورت گیرد آنگاه داریم:

$$3 \frac{d^2 v_0}{dt^2} + 10 \frac{dv_0}{dt} + 8v_0 = 6 \frac{d^2 i_s}{dt^2} \quad (۸-۵۵)$$

مشروط بر آنکه  $i_s(t) = 5 \cos(2t)$  باشد آنگاه طرف دوم این معادله به شکل  $-120 \cos(2t)$  خواهد شد. اگر فرض کنیم که

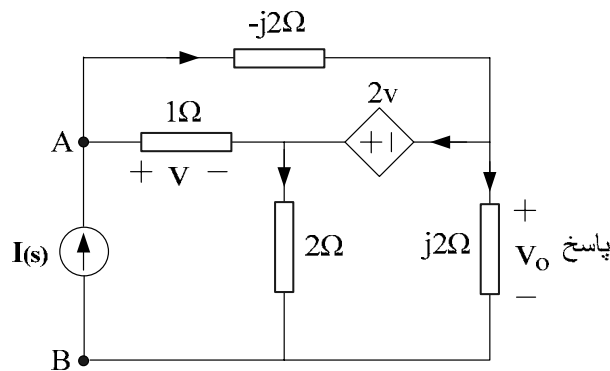
$v_0 = \text{Re}[Be^{j2t}] = B_m \cos(2t + \varphi)$  آنگاه به کمک معادله (۸-۲۵) خواهیم داشت:

$$B = \frac{30}{1 - 5j} = \frac{30}{\sqrt{26}} e^{j78/7^\circ} \quad (۸-۵۶)$$

و لذا پاسخ حالت دائمی سینوسی (با توجه به وجود فرکانسهای طبیعی در طرف چپ صفحه مختلط) برای  $v_0$  برابر است با:

$$v_0(t) = \frac{30}{\sqrt{26}} \cos(2t + 78/7^\circ) \quad (۸-۵۷)$$

در روش دیگر فرض کنید مجدداً به مدار شکل ۸-۱۴ باز گردیم. اگر عامل محرک مدار یعنی منبع جریان با فرکانس  $\omega = 2 \frac{rd}{sec}$  مدار را تحریک کند، آنگاه خازن از خود امپدانس معادل با  $-j2\Omega$  و سلف نیز امپدانس  $2j\Omega$  را نشان خواهند داد (توجه کنید که امپدانس سلف  $Z_L = j\omega L$  و امپدانس خازن  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$  بر طبق جدول ۸-۱ تعریف می شوند). به این ترتیب منبع جریان از سرهای  $A$  و  $B$ ، ترکیب امپدانس های زیر را در مقابل خود خواهد دید:



شکل ۸-۱۵ معادل مدار شکل ۸-۱۴ در توصیف فازوری

توجه کنید که در توصیف فازوری، اولاً متغیرهای زمانی که با حروف کوچک نشان می دهیم (مثل  $v_0(t)$  یا  $i_s(t)$  و غیره) در فرمت فازوری با حروف بزرگ نمایش داده می شوند (مثل  $V_0(j\omega)$  یا  $I_s(j\omega)$  و غیره). ثانياً در مدار معادل که در دامنه فازوری ترسیم می شود، کلیه امپدانسها (مقاومتهاى مختلط) به شکل یک مستطیل ترسیم می شوند و تنها از روی مقادیر آنها می توان دریافت که عنصر مورد نظر چیست. مثلاً امپدانس  $1\Omega$  یعنی یک مقاومت، یا امپدانس  $-j2\Omega = \frac{2\Omega}{j}$  می تواند نمایش امپدانس خازن باشد چرا

که "j" در مخرج کسر امپدانس است و بعلاوه بایستی  $\omega C = \frac{1}{2}$  باشد که با معلوم

بودن  $\omega = 2$  مقدار  $C = \frac{1}{4}$  خواهد بود و بهمین ترتیب برای سلف.

اما اگر در مدار معادل فازوری بخواهیم روی تحریک بحث کنیم، طبعاً این تحریک نیز باید در فرم فازوری خود ظاهر شود. بدین معنی که اگر  $i_s(t) = 5 \cos(2t)$  باشد آنگاه  $I_s = 5$  خواهد بود. لذا مدار شکل ۸-۱۵ که معادل فازوری مدار شکل ۸-۱۴ است، عملاً توسط فازور تحریک که یک مدار ساده حاوی مقاومتهای مختلط (امپدانسها) را

تغذیه می کند، می تواند مدلسازی شود. بدین معنی که می توان در این مدل فازوری، فرض کرد که منبعی معادل با فازور منبع محرک زمانی، مداری را حاوی امپدانسها تحریک می کند.

عملیات روی مدار فازوری وابسته به مدار اصلی، دقیقا مثل یک مدار مقاومتی است با این تفاوت که اولاً به جای منبع محرک متغیر با زمان، معادل فازوری آن و ثانياً بجای مقادیر مقاومتی حقیقی، مقاومتی مختلط قرار گرفته اند. حتی آنالیز این مدارات در حالت دائمی سینوسی می تواند توسط روشهای استاندارد مثل آنالیز مش و گره که در فصل دوم دیدیم و بدون هیچ تفاوتی صورت گیرد ولی با مقاومتی غیر حقیقی. اکنون با فرض  $I_s = 5$  آمپر بعنوان محرک مدار شکل ۸-۱۵ می توان مدار را آنالیز کرد. با

نوشتن KCL در گره A، جریان درون خازن  $\frac{1}{4}F$  (یا امپدانس  $-j2\Omega$ ) برابر است با:

$$I_s - \frac{V}{1} = 5 - V$$

جریان درون سلف (یا امپدانس  $2j\Omega$ ) نیز برابر با  $\frac{V_0}{2j}$  است و لذا جریان درون منبع

وابسته (البته در جهت غیر قراردادی) برابر است با تفاوت جریان خازن و سلف

یعنی:  $5 - V - \frac{V_0}{2j}$ . نهایتاً جریان درون امپدانس  $2\Omega$  نیز برابر با

خواهد شد. از نوشتن KVL در مش بالا داریم:

$$\frac{V}{1} + 5 - V - \frac{V_0}{2j} = 5 - \frac{V_0}{2j}$$

$$-3V + (-2j)(5 - V) = 0 \Rightarrow V = \frac{-10j}{3 - 2j}$$

و از نوشتن KVL در مش سمت راست خواهیم داشت:

$$2 \times \left( 5 - \frac{V_0}{2j} \right) = 2V + V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{30}{1 - 5j}$$

با داشتن این فازور می توان  $V_0(t)$  را نیز بدست آورد:

$$V_0(t) = \text{Re}[V_0 e^{j2t}] = \frac{30}{\sqrt{26}} \cos(2t + 78/7^\circ) \quad (8-58)$$

این حاصل، همان چیزی است که از حل معادله دیفرانسیل در رابطه (8-57) نیز بدست آورده بودیم و البته بدون آنکه معادله دیفرانسیلی نوشته شود.



## ۸-۵-۱ روش فازوری در آنالیز مدارهای LTI جهت تعیین پاسخ حالت دائمی

سینوس:

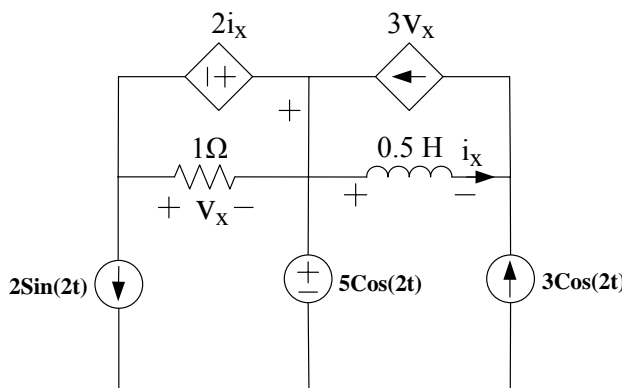
با توجه به آنچه که در مثال قبل دیدیم اکنون می توان روش فازوری را در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی مدارهای LTI بصورت زیر توصیف نمود:

- ابتدا کلیه شرایط اولیه مدار در حالت زمانی خود را صفر کرده و سپس مدار معادل فازوری را ترسیم می کنیم. منظور از مدار معادل فازوری مداری است با مقاومت‌های مختلط (امپدانسها) یا کندوکتانسهای مختلط (ادمیتانسها) و نیز معادل فازوری منابع مستقل هم فرکانسی که مدار را تحریک می کنند.

- در مدار فازوری حاصل از بند قبل می توان آنالیز مدار را به یکی از دو روش گره یا مش انجام داد، با فرض اینکه یک مدار مقاومتی اما با مقاومت‌های مختلط داریم. در این نوع آنالیز بجای تعیین مقادیر زمانی ولتاژها و جریانها، عملاً فازور آنها را بدست می آوریم چرا که KCL و KVL های حاکم بر مدار در دامنه زمانی، دقیقاً می توانند در دامنه فازوری نیز نوشته شوند.

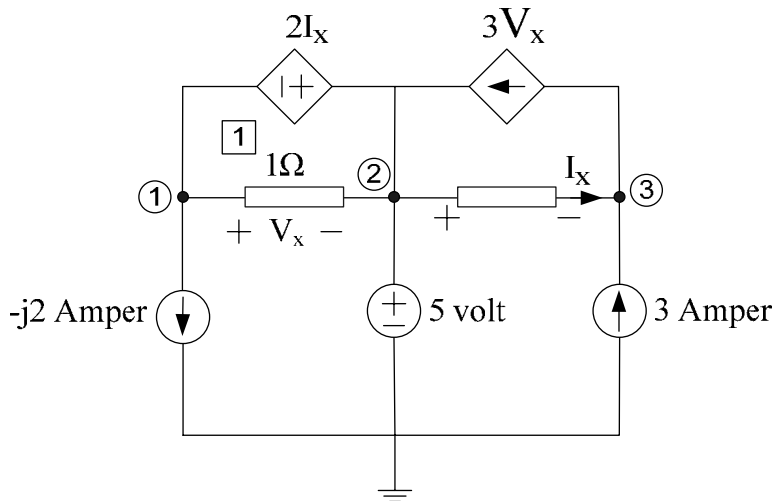
- فازور هر خروجی مورد نظر را میتوان از روش گره یا مش تعیین کرده و سپس از روی ارتباط فازورها با تابع زمانی خود، تابع زمانی متغیر مجهول را تعیین نمود [رابطه (۸-۲۱)].

مثال ۸: در مدار زیر معین کنید که ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دو سر سلف چقدر است؟



شکل ۸-۱۶ مدار مثال ۸

بر اساس روش کلی فوق ابتدا باید مدار معادل فازوری این مدار را از روی جایگزینی مقاومتها (یا کندوکتانسها) با امپدانسها (یا ادمیتانسها) و همچنین معادل فازوری منابع بدست آورد. منبع جریان  $2 \sin(2t)$  دارای فازوری معادل با  $z = 2 - j$  امپر، منبع جریان  $3 \cos(2t)$  دارای فازور ۳ امپر و منبع ولتاژ  $5 \cos(2t)$  دارای فازور ۵ ولت است (چرا؟). لذا مدار معادل فازوری به شکل ۸-۱۷ خواهد بود.



شکل 8-17 مدار معادل فازوری مثال 8

برای این مدار، آنالیز گره آنالیز مناسبی است که با فرض اتصال زمین سر مشترک منابع می توان تنها دو گره با ولتاژ مجهول داشت گره ۱ و ۳ (توجه کنید که فازور ولتاژ گره ۲ برابر با ۵ ولت است و نیازی به محاسبه ندارد. بعلاوه قابل ذکر است که منابع، همگی هم فرکانس هستند و در ترسیم معادل فازوری مدار ۱۶-۸ متغیرها با حروف بزرگ نشان داده شده اند تا بر فازور بودن آنها تاکید شود).

قبل از نوشتن معادلات در مش ۱ داریم:

$$V_x + 2I_x = 0$$

و بعلاوه در گره ۲ از روی KCL خواهیم داشت:

$$I_x + 3 = 3V_x$$

از حل این دو معادله  $I_x = -\frac{3}{7}$  و  $V_x = \frac{6}{7}$  بدست می آید و چون ولتاژ گره ۱،  $E_1$  (که

فازور  $e_1$  است)، برابر است با  $V_x + 5$  پس:

$$E_1 = V_x + 5 = \frac{41}{7}$$

به همین ترتیب می توان ولتاژ گره ۳ را نیز بدست آورد:

$$E_3 = V_3 = -(I_x \times j) + 5 = 5 + \frac{3}{7}j = 5/0183e^{j4/90}$$

پس ولتاژ گره ۱، گره ۲، گره ۳ همچنین ولتاژ در سر سلف یعنی  $I_x \times j$  در دامنه زمانی برابرند با:

$$e_1(t) = \frac{41}{7} \cos(2t) = \text{Re}[E / e^{j2t}]$$

$$e_2(t) = 5 \cos(2t)$$

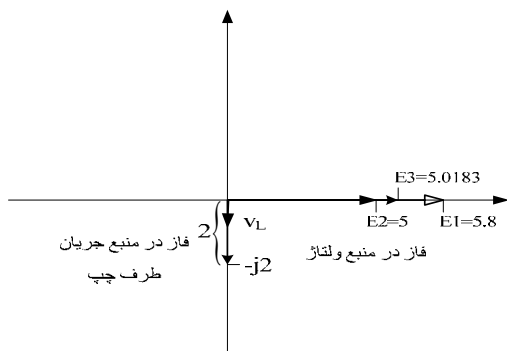
$$e_3(t) = 5.0183 \cos(2t + 4/9^\circ)$$

$$V_L = -\frac{3}{7}j \Rightarrow v_L(t) = \frac{3}{7} \sin(2t)$$



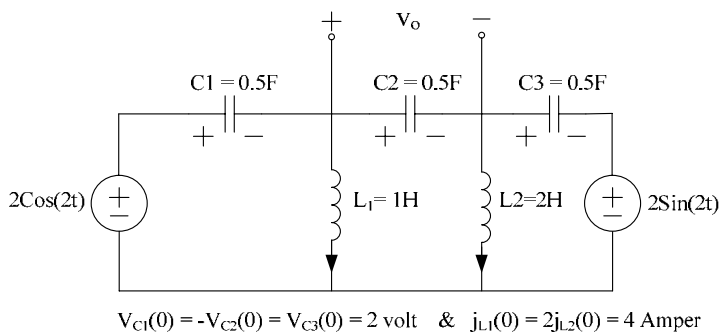
### ۸-۵-۲ دیاگرام فازوری :

در آنالیز حالت دائمی سینوسی رسم برآن است که یک دیاگرام از متغیرهای فازوری موجود در مدار در صفحه مختلط نیز ترسیم شود بطوریکه بتواند اختلاف فاز این فازورها را نسبت به هم نتیجه دهد. مثلا اگر ولتاژ گره ها، منابع و ولتاژ دو سر سلف را در مدار مثال فوق بخواهیم، می توان آنها را در چنین دیاگرامی ترسیم کرد. نتیجه حاصل بصورت شکل ۸-۱۸ خواهد بود که در آن هر فازور بصورت یک بردار ترسیم شده است. چنین دیاگرامی را **دیاگرام فازوری** نیز می نامیم.



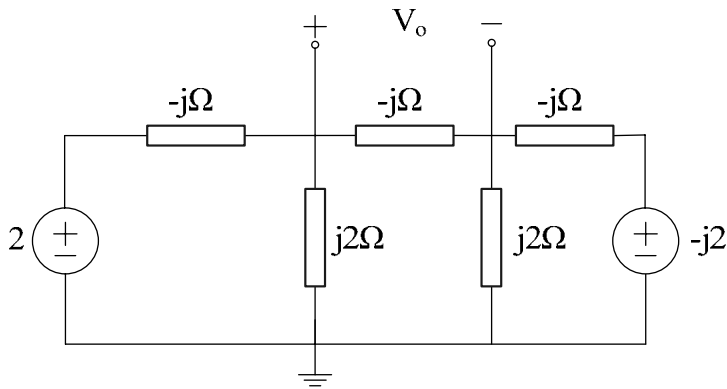
شکل ۸-۱۸ دیاگرام فازوری مثال ۸

مثال ۹: در مدار شکل زیر معین کنید ولتاژ حالت دائمی خازن وسط چقدر است؟ یک دیاگرام فازوری جهت ارتباط ولتاژها و جریانها ترسیم کنید.

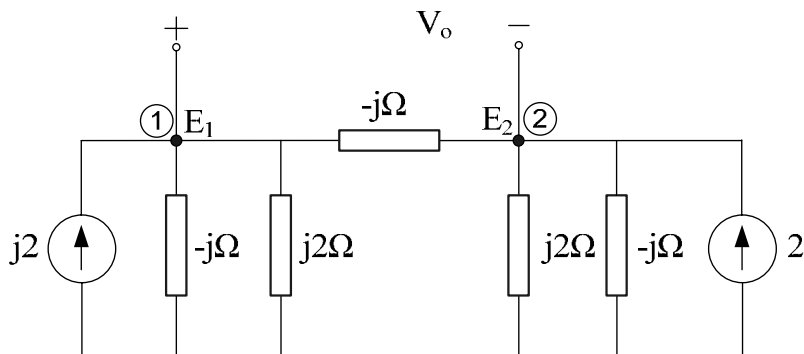


شکل 8-19 مدار مثال ۹

اگر مدار معادل فازوری این مدار را ترسیم کنیم به شکل ۸-۲۰ می‌رسیم و با اعمال معادل نرتن در طرف چپ و راست به مدار شکل ۸-۲۱ خواهیم رسید.



شکل ۸-۲۰ مدار معادل فازوری مثال ۹



شکل ۸-۲۱ مدار معادل مدار شکل ۸-۲۰

مجدداً از آنالیز گره داریم:

$$\text{گره 1: } 2j = \frac{E_1}{-j} + \frac{E_1}{2j} + \frac{E_1 - E_2}{-j}$$

$$\text{گره 2: } 2 = \frac{E_2}{-j} + \frac{E_2}{2j} + \frac{E_2 - E_1}{-j}$$

که از حل آن خواهیم داشت:

$$E_1 = 2/4 - 1/6j = 2/88e^{-j33/7^\circ}$$

$$E_2 = 1/6 - 2/4j = 2/88e^{-j56/3^\circ}$$

و لذا:

$$V_o = E_1 - E_2 = 0/8 + 0/8i = 1/1314e^{j45^\circ}$$

و بطور کلی ولتاژ و جریان همه شاخه‌ها برابر است با:

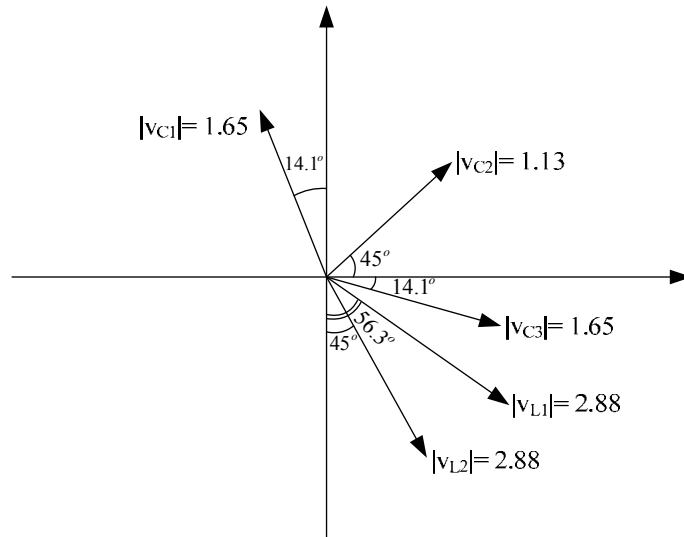
$$V_{C_1} = 2 - E_1 = -0/4 + 1/6j = 1/65e^{j104/1^0}$$

$$V_{C_2} = V_0 = 1/1314e^{j45^0}$$

$$V_{C_3} = E_2 - (-Lj) = 1/6 - 0/4j = 1/65e^{-j14^0}$$

$$V_{L_1} = E_1 = 2/88e^{-j33/7^0}, \quad V_{L_2} = E_2 = 2/88e^{-j56/3^0}$$

یک دیاگرام فازوری برای این مقادیر ولتاژ و لناژ مطابق شکل ۸-۲۲ است.



شکل ۸-۲۲ دیاگرام فازوری ولتاژ متغیرهای مثال ۹

## ۸-۶ مفهوم تابع شبکه و پاسخ فرکانسی فیلترها و مدارهای تشدید:

فرض کنید مطابق شکل ۸-۲۳ به مدار LTI که در حالت دائمی سینوسی قرار گرفته است و ورودی محرک آن تابعی به شکل  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$  است، خروجی  $y(t)$  را نسبت می دهیم. در این ترسیم، ورودی  $x(t)$  می تواند منبع ولتاژ یا جریان و همچنین خروجی  $y(t)$  می تواند ولتاژ یا جریان یک شاخه دلخواه از مدار باشد که بصورت مجزا ترسیم شده است.

یکی از کاربردهای این مدار LTI می تواند رفتاری باشد که مدار در فرکانسهای مختلف از خود نشان می دهد. به بیان دیگر ممکن است با افزایش فرکانس  $\omega$  ورودی، موجود در  $x(t)$ ، رفتار  $y(t)$  عوض شود و مثلاً تضعیف دامنه خروجی بوجود آید. لذا اطلاع از عملکرد رفتار مدار در قبال فرکانسهای مختلف تحریک ورودی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. البته علت چنین رفتاری وجود عناصر خازنی و سلفی درون مدار LTI است چرا که همانطوریکه دیدیم امپدانس یا ادمیتانس این عناصر تابع فرکانس هستند و لذا مشروط بر وجود این عناصر در مدار، رفتار مدار در قبال ورودی با فرکانسهای متفاوت عوض خواهد شد. بدیهی است اگر مدار فاقد عناصر سلف و خازن باشد و تنها



از مقاومتها و منابع مستقل و وابسته خطی تشکیل شده باشد، رفتار خروجی مستقل از فرکانس تحریک ورودی خواهد بود.

اما به منظور تعیین دقیق این رفتار فرکانسی می توان مفهومی را با عنوان تابع شبکه بصورت زیر تعریف نمود:

**تعریف (تابع شبکه):** فرض کنید که در مدار شکل ۸-۲۳ فازور ورودی زمانی  $x(t)$  با  $X(j\omega)$  و فازور خروجی  $y(t)$  را با  $Y(j\omega)$  نشان دهیم.



شکل ۸-۲۳ توصیف تحریک یک مدار LTI جهت تعریف تابع شبکه

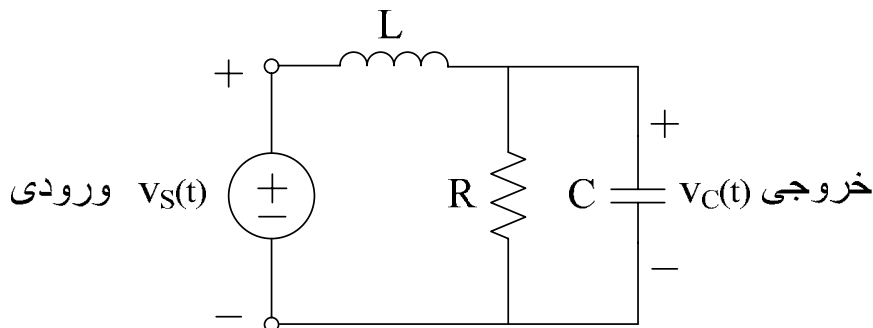
طبق تعریف نسبت فازور خروجی به فازور ورودی این مدار را تابع شبکه مدار تعریف کرده و آنرا با  $H(j\omega)$  نشان می دهیم:

$$H(j\omega) \equiv \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{\text{فازور خروجی}}{\text{فازور ورودی}} \quad (۸-۵۹)$$

**تذکر مهم:** توجه داشته باشید که در مدارهای LTI بر اساس تعریف تابع شبکه بصورت فوق، مهم است که بدانیم:

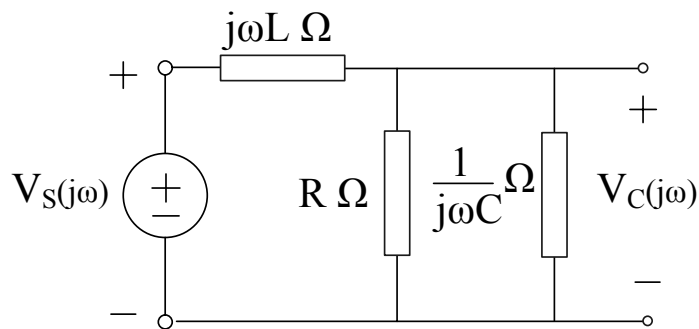
تابع شبکه مستقل از شکل موج تابع ورودی است و تنها به توپولوژی مدار (مقادیر عناصر و نحوه بهم بندی آنها) و فرکانس تحریک ورودی  $\omega$  وابسته است.

مثال ۱۰: تابع شبکه مدار شکل زیر را بدست آورید.



شکل ۸-۲۴ مدار مثال ۱۰

اگر برای این مدار معادل فازوری آنرا ترسیم کنیم به شکل ۸-۲۵ خواهیم رسید که در آن خروجی  $V_C(j\omega)$  و ورودی  $V_S(j\omega)$  است.



شکل 8-25 مدار معادل فازوری مثال ۱۰

ترکیب موازی مقاوم  $R$  و خازن  $C$  امپدانس معادل با:

$$\frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

را بدست می دهد. از آنجا که این امپدانس سری با امپدانس سلف است پس ولتاژ  $V_C$  که از تقسیم ولتاژ بین سلف و امپدانس معادل بالا بدست می آید برابر است با:

$$V_C(j\omega) = V_S(j\omega) \times \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{j\omega L + \frac{R}{1 + jRC\omega}}$$

که از آن مقدار  $H(j\omega)$  برابر است با:

$$H(j\omega) = \frac{V_C(j\omega)}{V_S(j\omega)} = \frac{R}{R(1 - LC\omega^2) + j\omega L}$$

که می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$H(j\omega) = \frac{R}{\left( [R(1 - LC\omega^2)]^2 + \omega^2 L^2 \right)^{1/2}} e^{-j\phi(\omega)}$$

در این رابطه، زاویه  $\phi(\omega)$  بصورت زیر تعریف شده است:

$$\phi(\omega) = -\angle H(j\omega) = \text{Tan}^{-1} \left[ \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right]$$



### ۸-۶-۱ انواع تابع شبکه:

بر اساس تعریف تابع شبکه بر طبق رابطه (۸-۵۹)، می توان در عمل به توابع شبکه مختلفی رسید. دسته بندی این توابع شبکه در یک مدار دلخواه، مدل شده در شکل ۸-۲۳ می تواند به صورتهای زیر باشد:

#### - ورودی منبع ولتاژ، خروجی ولتاژ روی یک شاخه دلخواه از مدار است.

تابع شبکه در این حالت نسبت در کمیت ولتاژ است و لذا دیمانسیون یا واحدی ندارد. گاهی در تعاریف کلی نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی را بهره ولتاژ نیز می نامیم.

#### - ورودی منبع جریان، خروجی جریان درون یک شاخه دلخواه از مدار است.

تابع شبکه در این حالت نیز نسبت دو کمیت هم جنس جریان است و لذا بدون واحد خواهد بود. در تعاریف کلی نسبت جریان خروجی به جریان ورودی را گاهی بهره جریان نیز می نامیم.

#### - ورودی منبع ولتاژ، خروجی جریان درون یک شاخه دلخواه از مدار است.

تابع شبکه در این حالت نسبت جریان به ولتاژ است که می تواند با واحد  $mho$  (مهو  $\bar{O}$ ) بیان شود. در تعاریف کلی نیز گاهی این پارامتر را بعنوان ادمیتانس انتقالی می شناسیم.

#### - ورودی منبع جریان، خروجی ولتاژ دو سر یک شاخه دلخواه از مدار است.

تابع شبکه در این حالت نسبت دو کمیت ولتاژ به جریان است که می تواند با واحد  $ohm$  (اهم  $\Omega$ ) بیان شود. در تعاریف کلی نیز گاهی این پارامتر را بعنوان امپدانس انتقالی می شناسیم.

**تذکر:** توجه کنید که در تعریف سوم اگر خروجی را جریان منبع ولتاژ تعریف کنیم، تابع شبکه همان ادمیتانس نقطه تحریک و در تعریف چهارم اگر این خروجی را ولتاژ دو سر منبع جریان اختیار کنیم، تابع شبکه همان امپدانس نقطه تحریک می باشد. لذا امپدانس نقطه تحریک و ادمیتانس نقطه تحریک حالات خاص از تابع شبکه اند.

### ۸-۶-۲ پاسخ فرکانسی:

بدست آوردن تابع شبکه برطبق آنچه که در قسمت قبل دیدیم بخودی خود نمی تواند اطلاعات مناسبی را از رفتار فرکانسی شبکه مورد نظر، بدست دهد. اما اگر این تابع شبکه ترسیم شود، آنگاه می توان به دید مناسبی از عملکرد فرکانسی مدار دست یافت. از آنجا که تابع شبکه، خود کمیت موهومی است، معمولا رسم بر آن است که این کمیت به دو جزء اندازه و فاز تجزیه شده (شبهه به مثال ۱۰) و سپس این دو جزء بر حسب فرکانس در یک ترسیم مشترک تصویر شوند. بر این اساس نیز تعریف زیر را داریم:

**تعریف (پاسخ فرکانسی):** مجدداً به مدار کلی شکل ۸-۲۳ باز می گردیم. اگر تابع

شبکه این مدار چنانچه در رابطه (۸-۵۹) دیدیم به شکل

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

**تعریف شود آنگاه خواهیم داشت:**

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} \quad (۸-۶۰)$$

اکنون بنا به تعریف ترسیم منحنی های اندازه تابع شبکه و همچنین فاز تابع شبکه را بر حسب فرکانس، پاسخ فرکانسی مدار شکل ۸-۲۳ می نامیم.

**تذکره ۱:** ترسیم پاسخ فرکانسی، ترسیم  $|H(j\omega)|$  و  $\angle H(j\omega)$  بر حسب مقادیر فرکانس  $\omega$  است که می تواند از صفر (ورودی DC) تا بی نهایت اختیار شود. معمولاً از آنجا که لازم است بازه وسیعی از تغییرات فرکانسی  $\omega$  را روی محور افقی در نظر بگیریم، گاهی محور افقی را به جای  $\omega$ ،  $\log \omega$  یا  $\ln \omega$  فرض می نمایم.

**تذکره ۲:** معمولاً بررسی رفتار فرکانسی، تنها با مرور کردن  $|H(j\omega)|$  صورت میگیرد. چرا که اگر اندازه این تابع شبکه در اندازه فازور ورودی دلخواه  $|X(j\omega)|$  ضرب شود، اندازه فازور خروجی  $|Y(j\omega)|$  بدست می آید [رابطه (۸-۵۹)]. بدیهی است به ازاء نقاطی از  $\omega$  که در آن نقاط  $|H(j\omega)|$  کم شود، تضعیف در خروجی صورت می گیرد و لذا می توان فرض کرد که مدار نوعی رفتار جلوگیری از گذر چنین فرکانسهائی را از خود نشان می دهد. بعلاوه موسوم است که این منحنی اندازه با واحد دسی بل (dB) نیز بیان شود که میتواند بصورت زیر تعریف گردد:

$$|H(j\omega)|_{dB} \equiv 20 \log [ |H(j\omega)| ] \quad (۸-۶۱)$$

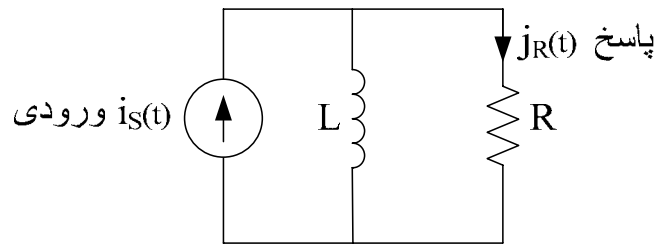
**تذکره ۳:** می توان نشان داد که تابع شبکه  $H(j\omega)$  دارای اندازه ای است که تابع زوجی از فرکانس  $\omega$ ، و فازی است که تابع فردی از این کمیت است. البته تفسیر  $\omega$  منفی در حال حاضر، چندان مد نظر نیست و ظاهراً مفهومی ندارد. اما این نکته از لحاظ ریاضی حائز اهمیت است.

**تذکره ۴:** اهمیت رفتار  $\angle H(j\omega)$  در بررسی نوسان سازها و دیگر کاربردهاست که در حال حاضر چندان توصیفی از آن نمی توان عنوان نمود. لذا در بررسی رفتار پاسخ فرکانسی، آنچه اهمیت فراوانی دارد ترسیم و تفسیر  $|H(j\omega)|$  است.

**تذکره ۵:** تابع شبکه  $H(j\omega)$  اهمیت بسیار ویژه ای دارد. لذا دانستن اندازه و فاز آن می تواند در بسیاری از موارد به سرعت ما را به پاسخ خروجی هدایت کند. مثلاً اگر ورودی مداری مثل شکل ۸-۲۳ برابر با  $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$  باشد، در این صورت خروجی برابر است با (چرا؟):

$$y(t) = X_m |H(j\omega)| \cos[\omega t + \phi + \angle H(j\omega)] \quad (۸-۶۲)$$

مثال ۱۱: پاسخ فرکانسی مدار شکل نشان داده شده را ترسیم کنید.



شکل ۸-۲۶ مدار مثال ۱۱

اگر برای مدار مقابل معادل فازوری را ترسیم کرده و سپس تابع شبکه آنرا بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$H(j\omega) = \frac{J_R(j\omega)}{I_S(j\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \times e^{j[\pi/2 - \varphi(\omega)]}$$

که در آن:

$$\varphi(\omega) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

و لذا:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

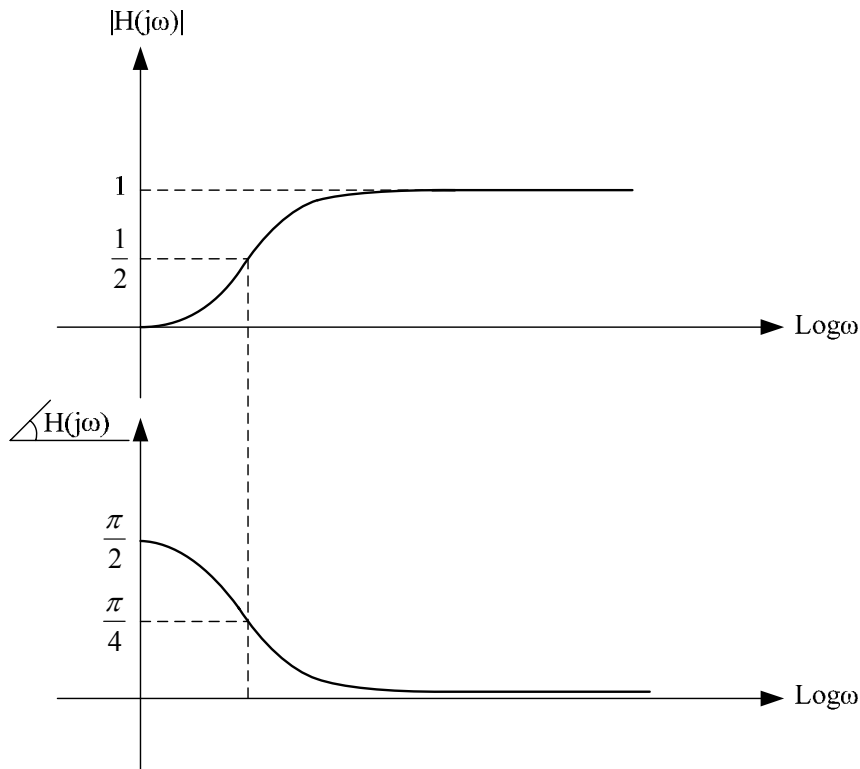
$$\angle H(j\omega) = \pi/2 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

در ترسیم  $|H(j\omega)|$  بر حسب  $\omega$  دیده می شود که اگر  $\omega = 0$  باشد آنگاه  $|H(j\omega)| = 0$  است به این معنی که برای جریانهای DC در خروجی نمی توان جریانی را مشاهده نمود (دلیل این مطلب نیز واضح است چرا که در جریانهای DC سلف اتصال کوتاه است و لذا ولتاژ و جریان مقاومت صفر خواهند بود). با افزایش فرکانس  $\omega$  تابع  $|H(j\omega)|$  شروع به زیاد شدن می کند. اما این تابع به ازاء مقادیر بزرگ از  $\omega$  به سمت ۱ میل می کند.

بهمین ترتیب در رابطه با فاز  $H(j\omega)$  می توان اظهار نظر نمود. در فرکانسهای کم در

حد صفر این فاز  $\pi/2$  است و با افزایش فرکانس جمله  $\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$  رشد کرده بطوریکه

این فاز در  $\omega$  های بسیار بزرگ به سمت  $0$  میل خواهد کرد و لذا  $\angle H(j\omega)$  از  $\pi/2$  در  $\omega = 0$  به سمت صفر در  $\omega$  های بزرگ میل خواهد کرد. ترسیم ساده ای از آنچه ذکر شد در شکل ۸-۲۷ ارائه شده است که همان پاسخ فرکانسی شبکه مورد نظر است.

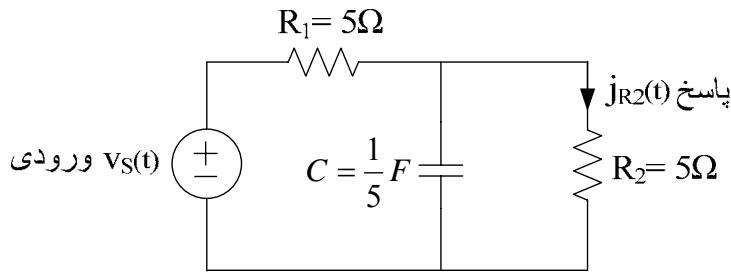


شکل ۸-۲۷ پاسخ فرکانسی مدار مثال ۱۱

توجه کنید که در فرکانس  $\omega = \frac{R}{L}$ ،  $|H(j\omega)| = \frac{1}{2}$  و  $\angle H(j\omega) = \pi/4$  است. در بررسی رفتار چنین مداری می توان دریافت که این مدار در فرکانسهای کم درصد کوچکی از ورودی را به خروجی منتقل می کند (به شکل  $|H(j\omega)|$  توجه کنید). حال آنکه با افزایش فرکانس این درصد نیز افزایش می یابد. از لحاظ فیزیکی ازدیاد فرکانس باعث بالا رفتن امپدانس دیده شده توسط سلف گشته (به جدول ۸-۱ مراجعه کنید) و با افزایش امپدانس سلف سهم بیشتری از  $I_S$  وارد مقاومت  $R$  می شود یعنی  $J_R$  افزایش می یابد. پس می توان نتیجه گرفت که این مدار حاوی تضعیف کننده سیگنال در فرکانسهای کم است. در واقع این مدار گذر دهنده سیگنالهای با فرکانس زیاد است.



مثال ۱۲: پاسخ فرکانسی مدار مقابل را ترسیم کرده و درباره رفتار آن توضیح دهید.



شکل ۸-۲۸ مدار مثال ۱۲

پاسخ فرکانسی این مدار را می توان از روی تابع شبکه آن که به شکل زیر قابل محاسبه است، ترسیم نمود:

$$H(j\omega) = \frac{J_{R_2}(j\omega)}{V_S(j\omega)} = \frac{1}{(R_1 + R_2) + jR_1R_2\omega C}$$

که برای مقادیر داده شده عناصر خواهیم داشت:

$$H(j\omega) = \frac{1}{7 + j\omega 2} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{49 + 4\omega^2}}_{|H(j\omega)|}} e^{\underbrace{-j \tan^{-1}(\frac{2\omega}{7})}_{\angle H(j\omega)}}$$

اکنون از روی این حاصل داریم:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{49 + 4\omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{7}\right)$$

دیده می شود که اگر  $\omega$  کوچک باشد آنگاه  $\frac{1}{7} \rightarrow |H(j\omega)|$  و این تابع با افزایش  $\omega$

کاهش خواهد یافت، بطوریکه در  $\omega$  های بزرگ  $|H(j\omega)| \rightarrow 0$ . مجددا در

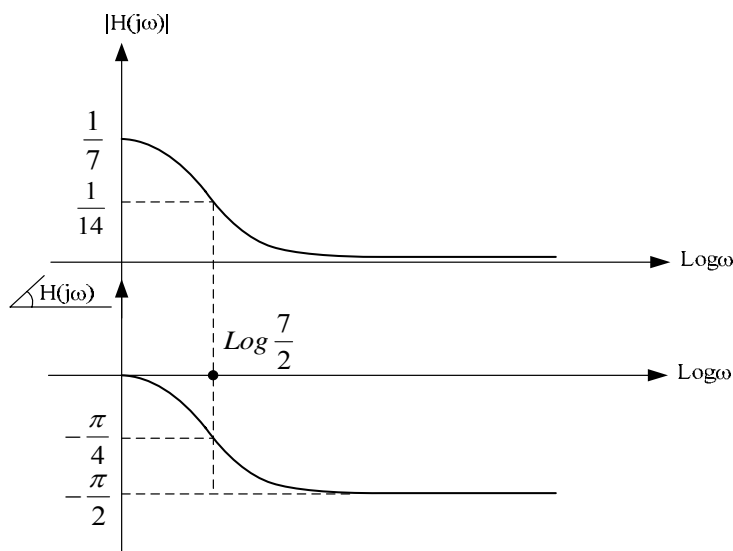
$H(j\omega) = \frac{1}{14}$  نیز  $\omega = \frac{7}{2} = \frac{rd}{sec}$  خواهد بود. تفسیر فیزیکی این رفتار نیز واضح است

چرا که در فرکانسهای کم، امپدانس خازن بسیار زیاد است (جدول ۸-۱) و کل منبع ورودی  $v_s(t)$  بین دو مقاومت  $R_1$  و  $R_2$  تقسیم می شود. اما با افزایش فرکانس، خازن

دارای امپدانس کوچکی خواهد شد که به معنی مقاومت (مختلط) کوچکی موازی با  $R_2$  خواهد بود. لذا قسمت اعظم جریان وارد شده از منبع (گذرنده از  $R_1$ ) از  $C$  عبور کرده و

سهم کوچکی نصیب  $R_2$  خواهد شد. پس در فرکانسهای زیاد جریان چندانی از  $R_2$  عبور نخواهد کرد.

در رابطه با فاز نیز در فرکانسهای کوچک، فاز  $H(j\omega)$  نزدیک به صفر است. اما با افزایش فرکانس، جمله  $\tan^{-1}(\frac{2\omega}{7})$  رشد کرده و در حد  $\omega \rightarrow \infty$  به سمت  $\frac{\pi}{2}$  میل خواهد کرد. بطوریکه در فرکانسهای زیاد  $\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$ . البته در  $\omega = \frac{7}{2}$  خواهیم داشت:  $\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{4}$ . نتایج فوق در شکل ۸-۲۹ ترسیم شده است.

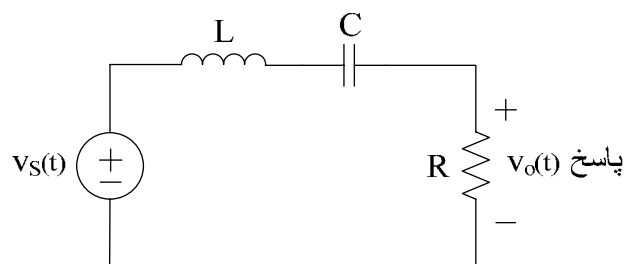


شکل ۸-۲۹ پاسخ فرکانس مدار مثال ۱۲

با توجه به منحنی  $|H(j\omega)|$  می توان دریافت که این مدار در فرکانسهای پائین تضعیف چندانی ندارد اما برای فرکانسهای بالا می توان چنین ادعا نمود که در خروجی درصد کمی از ورودی را خواهیم داشت. در واقع این مدار گذر دهنده سیگنالهای با فرکانس پائین است.



مثال ۱۳: پاسخ فرکانسی مدار مقابل را ترسیم کرده و عملکرد آنرا در فرکانسهای مختلف شرح دهید.



شکل ۸-۳۰ مدار مثال ۱۳



تابع شبکه این مدار برابر است با:

$$H(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}$$

اگر در این رابطه تعاریف زیر را انجام دهیم:

$$Q \equiv \frac{\omega_0 L}{R}, \quad \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

آنگاه می توان تابع شبکه را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} e^{-j \tan^{-1} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \\ &= |H(j\omega)| e^{-j\angle H(j\omega)} \end{aligned}$$

توجه کنید که در تعریف  $Q$  در واقع این ضریب همان ضریب کیفیت مدار است که در فصل

ششم آنرا با  $\frac{\omega_0}{2\alpha}$  نیز نشان داده بودیم.

بررسی و توصیف منحنی اندازه: منحنی اندازه را می توان بر حسب تغییرات  $\omega$  و به

شکل استدلالی نیز ترسیم کرد. در مقادیر  $\omega$  کوچک عبارت  $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  دارای اندازه

های بسیار بزرگ خواهد بود (چرا که  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow \infty$ ) و لذا اندازه  $H(j\omega)$  بسیار کم است.

به همین ترتیب اگر  $\omega$  زیاد شود مجدداً عبارت  $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  در مخرج دارای اندازه بزرگی

خواهد شد (چرا که  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ ) و باز  $|H(j\omega)|$  بسیار کم می گردد.

اما در در نقاط حول و حوش  $\omega = \omega_0$  جمله  $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  به سمت صفر میل می کند. در

این حالت عبارت  $Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$  در مخرج حداقل و لذا  $|H(j\omega)|$  حداکثر خواهد شد.

عبارت دیگر مثل این است که در  $\omega = \omega_0$  یا حوالی آن منحنی  $|H(j\omega)|$  دارای یک پیک خواهد بود.

در رابطه با  $\angle H(j\omega)$  می توان گفت که در  $\omega$  های کوچک این زاویه به سمت  $\pi/2$  میل می کند چرا که:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -\tan^{-1} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} -\tan^{-1} \left[ -Q \frac{\omega_0}{\omega} \right]$$

$$= - \left[ -\pi/2 \right] = \pi/2$$

با افزایش  $\omega$  این زاویه کاهش می یابد به طوری که در  $\omega = \omega_0$  خواهیم داشت:

$$\angle H(j\omega_0) = 0$$

و بالاخره در صورتی که  $\omega$  زیادتر شود آنگاه:

$$\angle H(j\omega_0) \rightarrow -\pi/2$$

نتایج این توصیف در شکل ۸-۳۱ دیده می شود.

در این شکل ترسیمهای مختلفی را به ازاء مقادیر مختلف  $Q$  می توان دید. همانطوریکه از نام  $Q$  می توان دریافت، افزایش این ضریب بمنزله افزایش کیفیت این مدار است. دیده می شود که  $Q$  بزرگتر بمنزله عبور باند باریکی از فرکانس از درون این مدار بوده و در طرفین این فرکانس عبوری (که در  $\omega = \omega_0$  واقع شده) دامنه  $|H(j\omega)|$  به شدت کاهش می یابد. لذا این مدار در فرکانسهای طرفین  $\omega = \omega_0$  تضعیف شدیدی دارد و این میزان شدت تضعیف وابسته به ضریب  $Q$  می باشد. بیشترین اجازه عبور فرکانس حول  $\omega = \omega_0$  است، بدین معنی که در این فرکانس مدار مقابله چندان با عبور سیگنال ندارد ولی در خارج از نواحی  $\omega = \omega_0$ ، سیگنال ورودی تضعیف می شود.

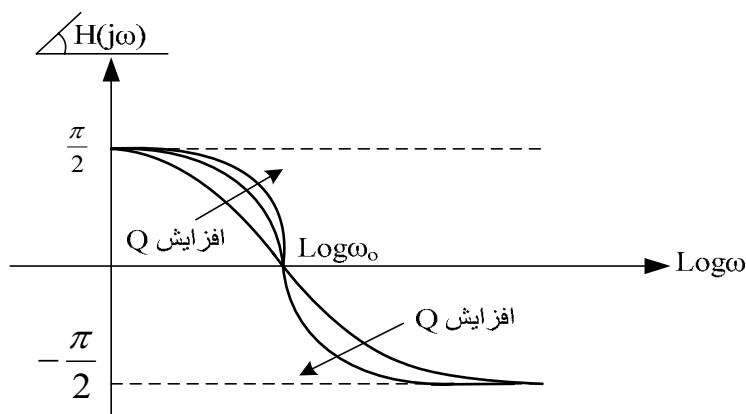
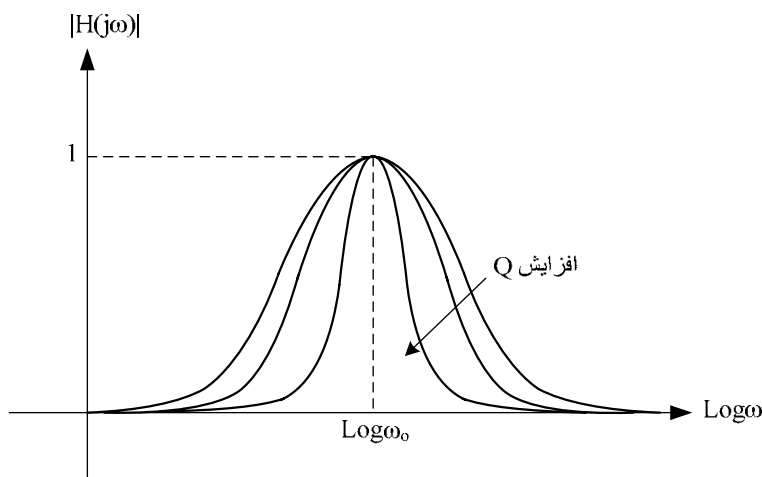
به لحاظ فیزیکی دلیل این رفتار چنین است که در فرکانسهای کم، امپدانس خازن بسیار زیاد است و لذا مقاومت (مختلط یا به بیان دیگر مقاومت ظاهری) خازن بسیار بالاست. همچنین در فرکانسهای زیاد نیز امپدانس سلف بسیار زیاد است و لذا مقاومت (مختلط یا ظاهری) سلف زیاد خواهد بود. اما آنچه جالب است حوالی نقطه  $\omega = \omega_0$  می باشد.

می دانیم که امپدانس سلف برابر است با  $j\omega L$  و امپدانس خازن  $\frac{-j}{\omega L}$ . جمع دو

امپدانس به شکل زیر است:

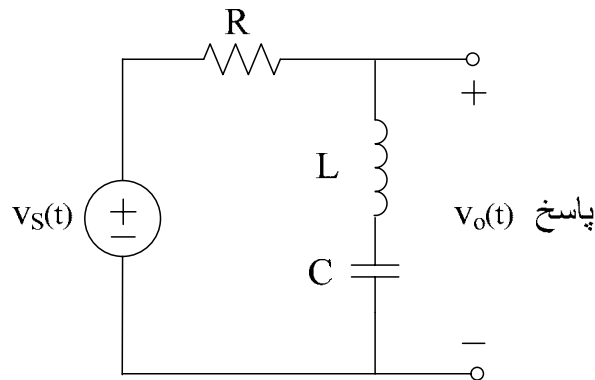
$$j\omega L - \frac{j}{\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{j}{\omega_0 C} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

و در  $\omega = \omega_0$  برابر صفر خواهد بود. یعنی در این فرکانس سلف و خازن اثر امپدانس یكدیگر را خنثی کرده (یکی امپدانس موهومی با ضریب مثبت و دیگری منفی) و در کل مثل این است که اصلاً ایندو عنصر در این فرکانس وجود نداشته و مدار تنها حاوی مقاومت  $R$  است. این فرکانس را گاهی فرکانس تشدید مدار نیز می نامیم. در واقع بیشترین اجازه عبور به سیگنال را، مدار به سیگنالهایی می دهد که فرکانس آنها  $\omega_0$  است. لذا این مدار رفتار عبور سیگنال را تنها در یک بازه معین فرکانسی در حوالی  $\omega_0$  مجاز می دارد و در خارج از این ناحیه می توان فرض کرد که سهم خروجی از ورودی محرک مدار، چندان زیاد نیست. اما آنچه مهم به نظر می رسد این است که بدانیم محدوده عبور را چگونه می توان مرز بندی کرد؟ پاسخ به این سؤال را در بخش بعدی خواهیم دید.



شکل ۸-۲۱ پاسخ مدار RLC سری در شکل مثال ۱۲

مثال ۱۴: پاسخ فرکانسی مدار زیر را ترسیم کرده و عملکرد آنرا در فرکانسهای مختلف شرح دهید.



شکل ۸-۳۲ مدار مثال ۱۴

تابع شبکه این مدار پس از قرار دادن  $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ،  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$  می تواند به شکل زیر

ساده شود:

$$H(j\omega) = \frac{jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$= \frac{Q \left| \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} e^{j \left[ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( Q \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}$$

در رابطه با منحنی اندازه می توان دریافت که در فرکانسهای کوچک عبارت  $\left| \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right|$

دارای اندازه های بسیار بزرگی است و لذا  $|H(j\omega)| \rightarrow 1$ . بهمین ترتیب اگر  $\omega$  زیاد شود مجددا این فاکتور زیاد شده و بنابراین باز هم  $|H(j\omega)| \rightarrow 1$ . اما در نقاط حول

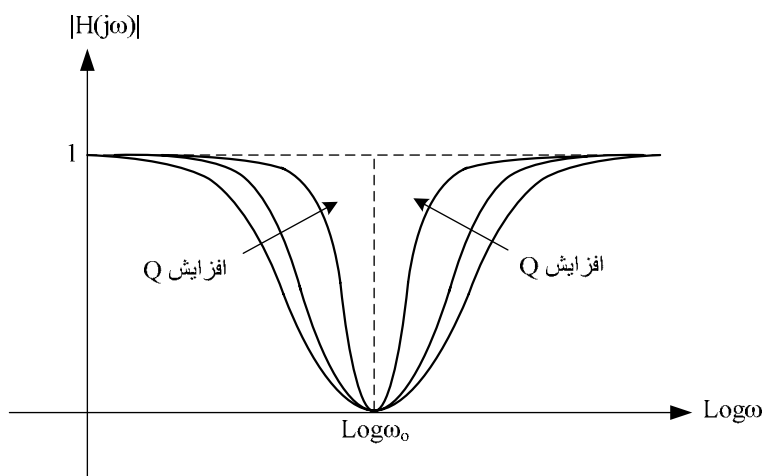
$\omega = \omega_0$  جمله  $\left| \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right|$  به سمت صفر میل خواهد کرد و لذا  $|H(j\omega)| = 0$  خواهد

بود. عبارت دیگر مثل این است که در  $\omega = \omega_0$  یا حوالی آن منحنی  $|H(j\omega)|$  دارای حداقل صفر خواهد بود. اما در رابطه با  $\angle H(j\omega)$  می توان گفت که در  $\omega$  های کوچک این زاویه به سمت  $\pi$  میل می کند (چرا؟). با افزایش  $\omega$  این زاویه کاهش می یابد

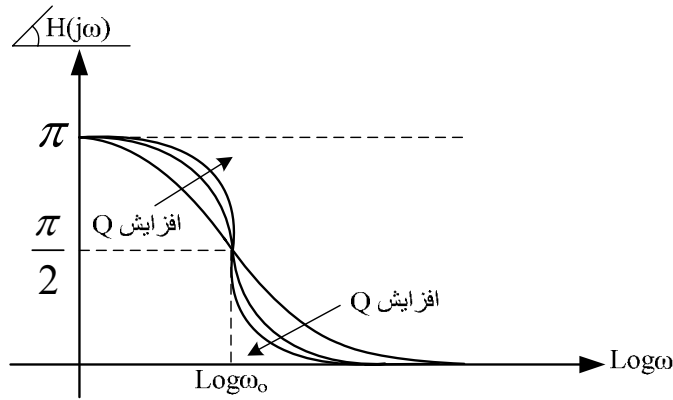
بطوریکه در  $\omega = \omega_0$  به مقدار  $\pi/2$  رسیده و بالاخره در صورتی که  $\omega$  زیادتر شود آنگاه  $\angle H(j\omega) \rightarrow 0$ .

نتایج این توصیف در شکل ۸-۳۳ دیده می شود. در این شکل ترسیمهای مختلفی را به ازاء مقادیر مختلف  $Q$  می توان دید. دیده می شود که  $Q$  بزرگتر بمنزله عدم عبور باریکی از باند فرکانسی از این مدار بوده و در طرفین این فرکانس عبوری (که در  $\omega = \omega_0$  واقع شده) دامنه  $|H(j\omega)|$  مجددا افزایش می یابد. لذا این مدار در فرکانسهای حول  $\omega = \omega_0$  تضعیف شدیدی دارد که وابسته به ضریب  $Q$  نیز می باشد.

به لحاظ فیزیکی دلیل این رفتار چنین است که در فرکانسهای کم امپدانس کم امپدانس سلف بسیار کم و امپدانس خازن بسیار زیاد است و به هر حال از ترکیب سری آنها جریانی عبوری نمی کند. لذا ولتاژ دو سر مجموعه سلف و خازن با ولتاژ ورودی یکسان است (چرا که جریان عبوری مدار صفر است و بنابراین ولتاژ دوسرمقاومت صفر بوده، بطوریکه KVL ملزم می دارد ولتاژ  $V_S$  روی دو سر ترکیب خازن و سلف قرار گیرد). در فرکانسهای زیاد امپدانس سلف بسیار زیاد و امپدانس خازن بسیار کم است و مجددا باز هم از ترکیب سری آنها جریانی عبور نمی کند و لذا ولتاژ دو سر مجموعه سلف و خازن با ولتاژ ورودی یکسان خواهد بود. نتیجه هر دو حالت مذکور این است که  $|H(j\omega)| \rightarrow 1$ . اما در حوالی  $\omega = \omega_0$  مجددا سلف و خازن اثر امپدانسی یکدیگر را خنثی کرده و امپدانس کل صفر را نتیجه می دهند که در این فرکانس  $|H(j\omega)| \rightarrow 0$ . این همان فرکانس تشدید است، که در آن کمترین اجازه عبور به سیگنال داده می شود. پس می توان دریافت که این مدار در قبال عبور سیگنال تنها دربازه معینی از خود محدودیت عبور نشان داده و در سایر نواحی تضعیف کمی را روی ورودی اعمال می کند.



ادامه شکل در صفحه بعد

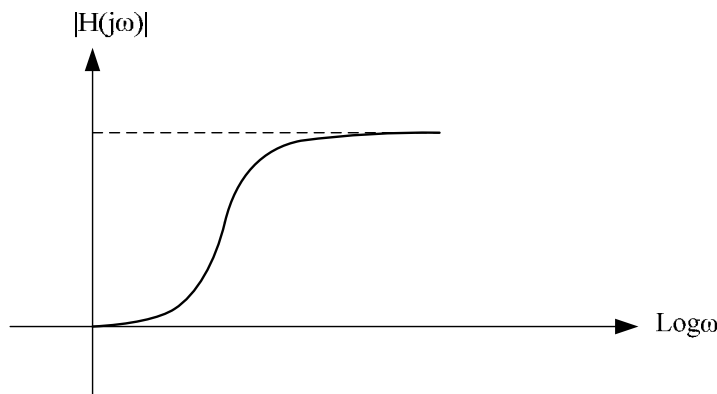


شکل ۸-۲۲ پاسخ فرکانس مدار RLC سری در شکل مثال ۱۴

### ۸-۶-۳ فیلترها:

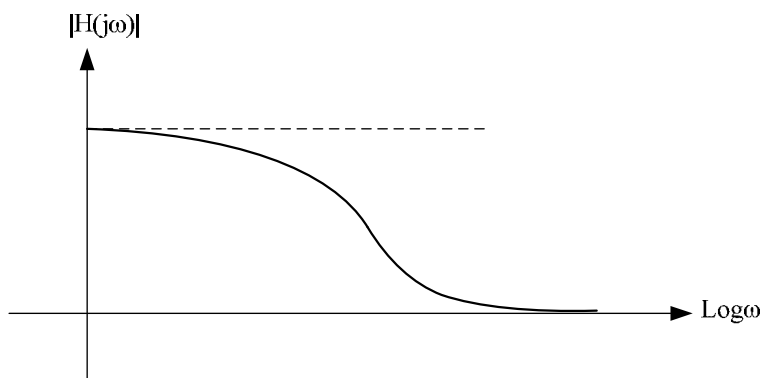
در قسمتهای قبل دیدیم که مدارهایی وجود دارند که می توانند بصورت گزینشی سیگنالهایی را با محدوده معین فرکانس از خود عبور دهند. چنین مدارهایی را بعنوان **فیلترها** می شناسیم. در واقع یک فیلتر می تواند قطعه ای از محدوده فرکانس موجود درون سیگنال دلخواهی، که حاوی بازه وسیعی از فرکانسهاست را عبور داده یا حذف کند. بر اساس این خاصیت می توان چهار نوع فیلتر موسوم را بصورت زیر تعریف کرد:

- **فیلتر بالا گذر:** این نوع فیلتر، مداری است که سیگنالهای با فرکانس کم را با تضعیف زیاد ولی سیگنالهای با فرکانس بالا را با تضعیف کم یا حتی در حالت ایده آل بدون تضعیف، از خود عبور می دهد. یک طرح کلی از چنین فیلتری می تواند بصورت شکل ۸-۲۴ باشد. یک مدار ساده که می تواند از نقش فیلتر بالاگذر را داشته باشد ترکیب سری خازن و مقاومتی است که ورودی آن منبع ولتاژ و خروجی آن ولتاژ دو سر مقاومت است.



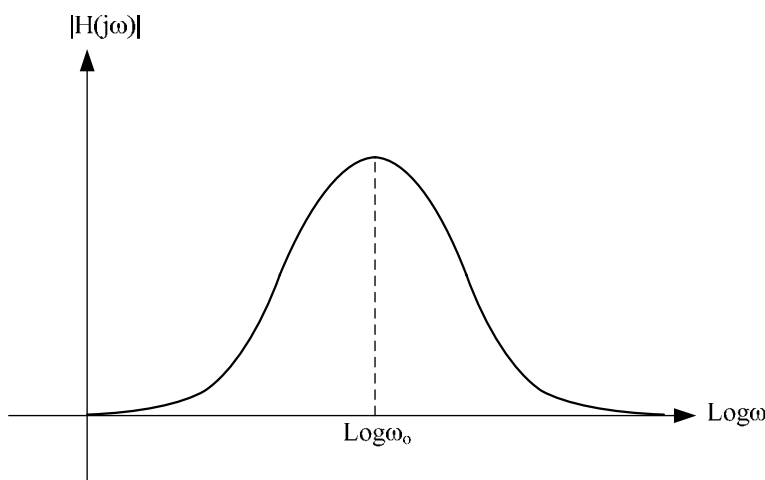
شکل ۸-۲۴ نمایش منحنی اندازه تابع شبکه برای فیلتر بالاگذر

- **فیلتر پائین گذر:** این نوع فیلتر، مداری است که سیگنالهای با فرکانس زیاد را با تضعیف زیاد ولی سیگنالهای با فرکانس کم را با تضعیف کم و یا حتی در حالت ایده آل بدون تضعیف، از خود عبور می دهد. یک طرح کلی از این نوع فیلتر نیز در شکل ۸-۳۵ دیده می شود. مدار ساده ای جهت این نوع فیلتر می تواند از ترکیب سری سلف و مقاومتی باشد که توسط یک منبع ولتاژ تحریک می شود و خروجی آن ولتاژ دو سر مقاومت است.



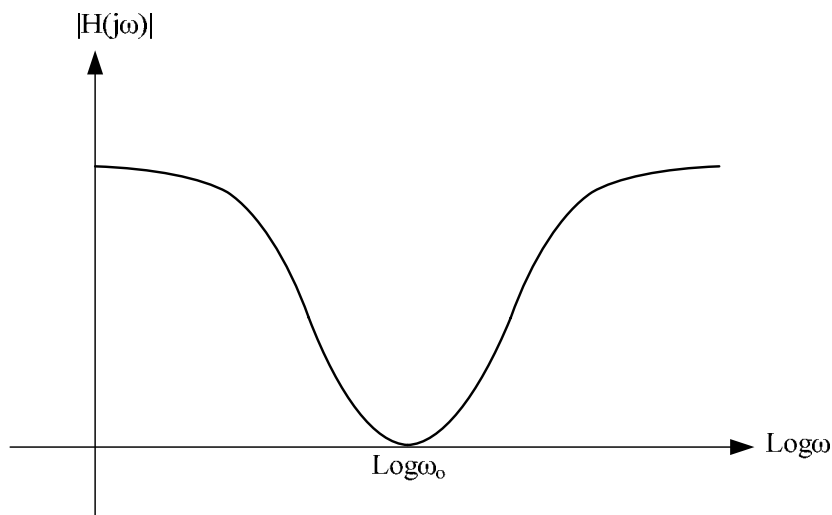
شکل ۸-۳۵ نمایش منفی اندازه تابع شبکه برای یک فیلتر پائین گذر

- **فیلتر میان گذر:** این نوع فیلتر، مداری است که سیگنالهایی را تنها در یک بازه معین از خود عبور می دهد و خارج از این بازه، سیگنال ورودی با تضعیف زیاد گذر خواهد کرد. یک مدار ساده که می تواند جهت چنین فیلتری ارائه شود ترکیب سری مقاومت، خازن و سلف است که توسط یک منبع ولتاژ تحریک شده و خروجی آن ولتاژ دو سر مقاومت است. یک طرح ساده از چنین فیلتری در شکل ۸-۳۶ دیده می شود. در این نوع فیلترها معمولا گذر حول یک فرکانس مرکزی صورت می گیرد که در شکل آنرا با  $\omega_0$  نشان داده ایم.



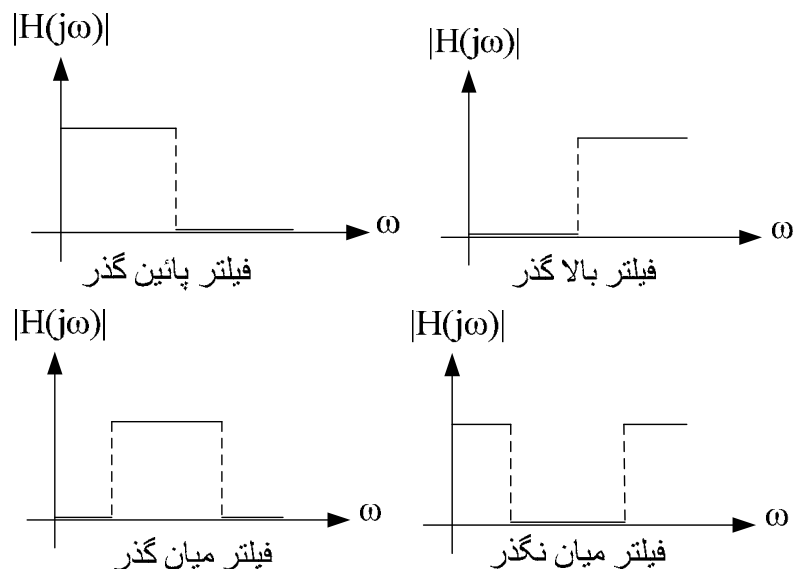
شکل ۸-۳۶ نمایش منفی اندازه تابع شبکه برای یک فیلتر میان گذر

- **فیلتر میان نگذر:** این نوع فیلتر، مداری است که سیگنالهایی را تنها در یک بازه معین از خود عبور نمی دهد و در خارج از این بازه، سیگنال ورودی با تضعیف کمی گذر خواهد کرد. یک مدار ساده که می تواند جهت چنین فیلتری ارائه شود ترکیب سری مقاومت، خازن و سلف است که توسط منبع ولتاژی تحریک شده و خروجی آن ولتاژ ترکیبی دو سر سلف و خازن می باشد. یک طرح ساده از چنین فیلتری در شکل ۸-۳۷ دیده می شود. در این نوع فیلترها، معمولاً عدم گذر حول یک فرکانس مرکزی صورت می گیرد که در شکل آنرا با  $\omega_0$  نشان داده ایم.



شکل ۸-۳۷ نمایش منفی اندازه تابع شبکه برای یک فیلتر میان نگذر

**تذکره:** انواع فیلترهای فوق در ترسیمات نشان داده شده، فیلترهای غیر ایده آند. اگر مدنظر، فیلترهای ایده آل باشند، بایستی شکل ایده آل آنها بصورت ترسیم شده در شکل 8-38 باشد.



شکل 8-38 ترسیم انواع فیلترهای ایده آل



مرز گذر یا عدم گذر فرکانسی در چنین فیلترهایی کاملاً مشخص است، در حالی که در فیلترهای غیر ایده آل چنین نیست. بدین منظور برای فیلترهای عملی بایستی یک بازه عبور را تعریف کرده که بر اساس رابطه ویژه ای بیان می گردد.

**تعریف (پهنای باند):** پهنای باند یک فیلتر معمولاً در رابطه با فیلترهای میان گذر یا میان نگذر تعریف می شود که قابل تعمیم به سایر انواع فیلترهای پائین گذر یا بالا گذر نیز می باشد. در واقع این تعریف بر اساس مرزی است که می توان در آن مرز، فرض کرد در یک طرف عبور سیگنال را با تضعیف و در طرف دیگر بدون تضعیف داریم. فرکانسی که این مرز را مشخص می نماید به فرکانس قطع فیلتر مشهور است. فرکانس قطع را می توان فرکانسی دانست که در آن توان در خروجی مدار فیلتری به نصف مقدار ماکزیمم خود می رسد. از آنجا که توابع شبکه معمولاً نسبت ولتاژ یا جریانها هستند (که جذر توانها محسوب می شوند) لذا تعیین فرکانس قطع توسط شرط  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  شدن حداکثر اندازه تابع شبکه خواهد بود و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\frac{|H(j\omega)|}{|H(j\omega)|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۸-۶۳)$$

مثلاً در یک فیلتر میان گذر دو فرکانس قطع بوجود می آیند یکی در طرف چپ ناحیه عبور و دیگری در طرف راست آن. در این نوع فیلترها، پهنای باند آنها محدوده فرکانسی بین این دو فرکانس تعریف می نمائیم.

بعلاوه توجه کنید به دلیل آنکه  $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3$  است و در تعریف پاسخ فرکانسی توصیف بر حسب dB (دسی بل) را عنوان نمودیم، فرکانسهای قطع را گاهی فرکانسهای قطع -3dB نیز می نامیم.

مثال ۱۵: فرض کنید پاسخ فرکانس یک فیلتر میان گذر به شکل زیر باشد:

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

که در آن  $\omega_0, Q, A$  کمیت‌های ثابتی هستند. معین کنید که فرکانسهای قطع -3dB و همچنین پهنای باند چنین فیلتری چیست؟ برای  $Q$  بزرگ نتیجه را بررسی نمائید. دیده می شود که تابع فوق دارای حداکثری معادل با  $A$  است. لذا جهت تعیین فرکانسهای قطع -3dB کافی است که از رابطه (۸-۶۳) استفاده کرد:

$$\left| \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \pm \frac{1}{2Q}$$

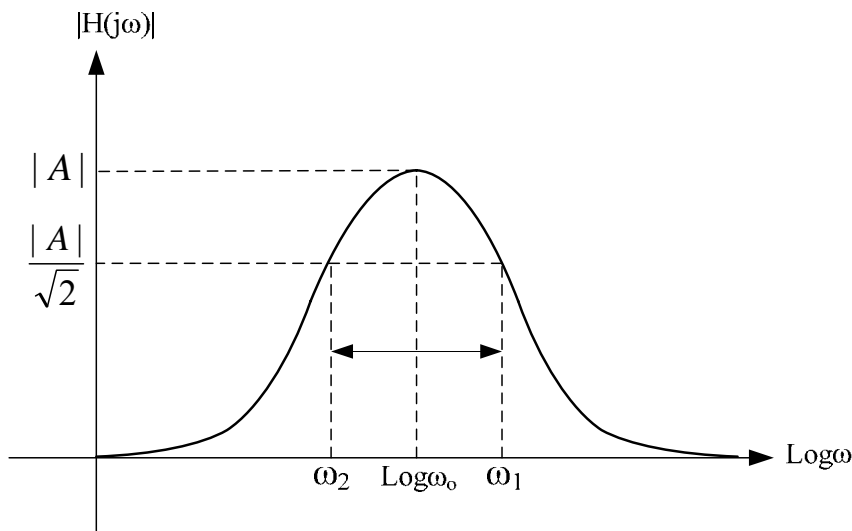
توجه کنید که حل معادله فوق بایستی پاسخهای مثبتی را برای  $\omega$  بدست دهد. لذا فرکانس قطع -3dB در طرف چپ برابر است با:

$$\omega_1 = \omega_0 \left[ \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} - \frac{1}{2Q} \right]$$

و فرکانس قطع 3Db در طرف راست برابر است با:

$$\omega_2 = \omega_0 \left[ \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} + \frac{1}{2Q} \right]$$

این فرکانسها در شکل ۸-۳۹ دیده می شوند.



شکل ۸-۳۹ توصیف فرکانسهای قطع و پهنای باند فیلتر میان گذر مثال ۱۵

می توان پهنای باند ( $B.W.$ ) این فیلتر را بر اساس تفاضل دو فرکانس قطع بصورت زیر بدست آورد:

$$B.W. = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Delta f = \frac{B.W.}{2\pi} = \frac{f_0}{Q}$$

اگر  $Q$  بسیار بزرگ باشد آنگاه می توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\cong 1 + nx \quad \& \quad |x| \ll 1$$

و بنابراین برای مقادیر  $\omega_2, \omega_1$  داریم :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} = \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{8Q^2}$$

$$\omega_1 \cong \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2Q} + \frac{1}{8Q^2}\right]$$

$$\omega_2 \cong \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2Q} + \frac{1}{8Q^2}\right]$$

$$\Rightarrow B.W. (rd/sec) = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$B.W. (Hz) = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$



**تذکره:** در فصل ششم دیدیم که اگر مداری در حالت میرای نوسانی باشد، آنگاه  $\frac{1}{2} < Q$  است.

در صورتی که مدار دارای  $Q$  بالائی بوده و از مرتبه دوم باشد، دارای دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط یکدیگر است که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad \& \quad \omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

از آنجا که مقدار ضریب کیفیت به شکل  $Q \equiv \frac{\omega_0}{2\alpha}$  تعریف می شود پس می توان  $\alpha \equiv \frac{\omega_0}{2Q}$  فرض

کرده و لذا:

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

خواهد بود. در اینحالت برای  $Q$  بزرگ می توان از تقریبهای زیر استفاده کرد:

$$\omega_d \cong \omega_0 \quad \& \quad \omega_1 \cong \omega_0 - \alpha \quad \& \quad \omega_2 \cong \omega_0 + \alpha$$

$$\Rightarrow B.W. = 2\alpha$$

#### ۸-۶-۴ مدارهای تشدید:

فرض کنید یک مدار LTI را توسط ورودی به شکل سینوسی تحریک می‌نمائیم (مثلا شکل 8-23)، بطوریکه فرکانس ورودی  $\omega$  باشد. اگر امپدانس نقطه تحریک (یا ادمیتانس نقطه تحریک) چنین مداری را بدست آوریم داریم:

$$Z_{D.P.}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (۸-۶۴)$$

$$Y_{D.P.}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \quad (۸-۶۵)$$

بطوریکه روابط زیر نیز بر قرارند:

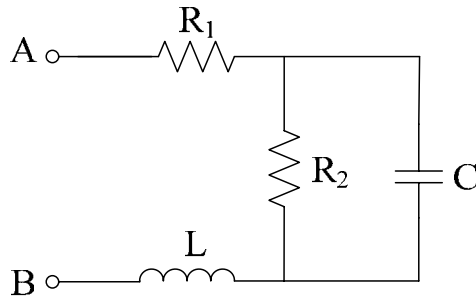
$$G(\omega) = \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad B(\omega) = \frac{-X(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad (۸-۶۶)$$

$$R(\omega) = \frac{G(\omega)}{G^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (۸-۶۷)$$

بنا به تعریف، قسمت موهومی امپدانس، یعنی  $X(\omega)$  را، **راکتانس** و قسمت موهومی ادمیتانس، یعنی  $B(\omega)$  را، **سوسپتانس** می‌نامیم.

اگر در یک فرکانس خاص مثل  $\omega_0$  مقدار  $X(\omega_0)$  یا  $B(\omega_0)$  صفر باشد آنگاه  $\omega_0$  را **فرکانس تشدید** مدار فوق می‌نامیم.

مثال 16 : فرکانس تشدید مدار شکل زیر را تعیین کنید.



شکل 8-40 مدار مثال 16

اگر امپدانس نقطه تحریک، یعنی امپدانس دیده شده از سرهای  $A$  و  $B$  را بدست آوریم داریم:

$$Z_{D.P.}(j\omega) = R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + jR_2\omega C}$$

که اگر آنرا به شکل یک عدد موهومی بصورت  $Z_{D.P.}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$  بنویسیم داریم:

$$Z_{D.P.}(j\omega) = \frac{R_1(1 + jR_2^2\omega^2C^2) + R_2 + j[\omega L(1 + jR_2^2\omega^2C^2) - R_2^2\omega C]}{1 + jR_2^2\omega^2C^2}$$

و از صفر قرار دادن  $X(\omega_0) = 0$  (با فرض  $\omega_0 \neq 0$ ) خواهیم داشت:

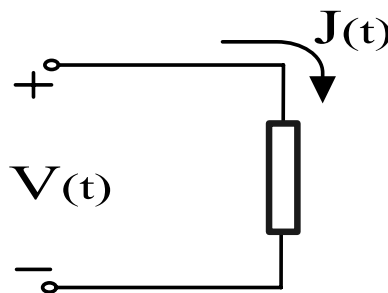
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_2^2C^2}}$$

گاهی اوقات ممکن است که در صفحه مختلط امپدانس یا ادمیتانس، ترسیمی از نحوه تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی امپدانس یا ادمیتانس را نیز ارائه دهیم. بدین معنی که مثلاً در صفحه امپدانسی، با حذف  $\omega$  بین قسمت‌های حقیقی و موهومی امپدانس، یک منحنی بدست آوریم که در واقع مکان امپدانس  $Z$  نامیده می‌شود. با تعریفی مشابه، می‌توان در صفحه ادمیتانس با حذف  $\omega$  بین قسمت‌های حقیقی و موهومی ادمیتانس، به مکان ادمیتانس  $Y$  خواهیم رسید. توجه کنید که در تشدید، امپدانس دیده شده از سرهای  $A$  و  $B$ ، کاملاً مقاومتی است و در حالت کلی ترکیبی از اندازه‌های مقادیر مقاومت‌های مدار و همچنین ظرفیتها و اندوکتانسهای سلفهای درون آن است.

### 8-7 توان در حالت دائمی سینوسی:

فرض کنید عنصری مطابق شکل 8-41 داریم که ولتاژ و جریان لحظه‌ای آن به ترتیب  $v(t)$ ،  $j(t)$  باشد. قبلاً دیدیم که توان لحظه‌ای دریافتی توسط این عنصر برابر است با:

$$p(t) \equiv v(t)j(t) \quad (8-68)$$



شکل 8-41 نمایش یک عنصر دلخواه

توجه کنید که توان لحظه‌ای می‌تواند در بعضی از زمانها منفی باشد. همچنین انرژی تحویل داده شده به آن در فاصله  $(t_0, t)$  برابر است با:

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\lambda) d\lambda = \int_{t_0}^t v(\lambda) j(\lambda) d\lambda \quad (8-69)$$

اما در بحث آنالیز حالت دائمی سینوسی، از آنجا که ولتاژ و جریان توابع سینوسی اند، می توان به توانهای مختلفی رسید. اگر فرض کنیم:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V) \quad , \quad j(t) = J_m \cos(\omega t + \angle J)$$

**توان لحظه ای:** دیدیم که این توان به شکل رابطه (8-68) بوده که برای توابع سینوسی داریم:

$$p(t) = v(t)j(t) = V_m J_m \cos(\omega t + \angle V) \cos(\omega t + \angle J) \\ = \frac{1}{2} V_m J_m \cos(\angle V - \angle J) + \frac{1}{2} V_m J_m \cos(2\omega t + \angle V + \angle J) \quad (8-70)$$

در محاسبات توان معمولا اگر برای عنصر موجود در شکل 8-41، زاویه ولتاژ دو سر آن  $\angle V$  و زاویه جریان عبوری از آن  $\angle J$  باشد آنگاه زاویه:

$$\varphi \equiv \angle V - \angle J \quad (8-71)$$

را تعریف کرده و قرار داد می کنیم  $\cos \varphi$  را بعنوان **ضریب توان** عنصر مورد بحث بیان کنیم. مثلا ضریب توان مقاومت، 1 است چرا که زاویه ولتاژ و جریان آن یکسان بوده و  $\varphi = 0$  است. برای خازن و سلف داریم:

$$\text{برای خازن} \quad \varphi = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 0$$

$$\text{برای سلف} \quad \varphi = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 0$$

توجه کنید که  $\varphi$  زاویه امپدانس عنصر مورد نظر نیز می باشد.

**توان متوسط:** در آنالیز حالت دائمی سینوسی، معمولا توان لحظه ای اطلاعات مفیدی را بدست نمی دهد، چرا که نسبت به زمان عوض می شود. توانی که معمولا در بررسی عناصر مدنظر است توانی است موسوم به توان متوسط. توان متوسط در بحث آنالیز حالت دائمی سینوسی، توانی است که بطور متوسط در طول یک پریود از سیگنال سینوسی به عنصر تحویل داده می شود. این توان را از روی توان لحظه ای بصورت زیر بدست می آوریم:

$$P_{av} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (8-72)$$

با این تعریف و از روی رابطه (8-70) توان متوسط برابر است با:

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_m J_m \cos(\angle V - \angle J) \\ P_{av} = \frac{1}{2} V_m J_m \cos \varphi \quad (8-73)$$

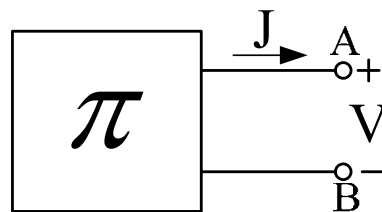
در محاسبه انتگرالهائی که عبارت زیر آنها تابع سینوسی است، معمولا انتگرال را با تغییر متغیر  $\alpha \equiv \omega t$  محاسبه می کنیم. مثلا در تعریف توان متوسط ممکن است رابطه (8-72) در آنالیز حالت دائمی سینوسی به شکل زیر نوشته شود:

$$P_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\alpha) d\alpha \quad (8-74)$$

توان متوسط معرفی را گاهی اوقات توان اکتیو نیز می نامیم. توجه کنید که این توان همیشه غیر منفی است.

**توان ظاهری:** فرض کنید شبکه  $\pi$  مطابق شکل در حالت دائمی سینوسی است و فازور ولتاژ و جریان سرهای آن،  $A$  و  $B$  بترتیب  $V$  و  $J$  هستند. شبکه می تواند حاوی عناصر مختلفی به همراه منابع مستقل هم فرکانس باشد که قرار است از سرهای  $A$  و  $B$  به عنصری مثل عنصر موجود در شکل 8-41 متصل شود. اگر تابع زمانی فازور  $J$ ، به شکل  $j(t) = J_m \cos(\omega t + \angle J)$  و برای فازور  $V$ ، تابع زمانی به شکل  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V)$  باشد آنگاه می توان توان ظاهری تحویل شده به سرهای  $A$  و  $B$  در شکل فوق را بصورت زیر تعریف کرد:

$$S \equiv \frac{1}{2} V_m J_m \quad (8-75)$$



شکل 8-42 مدار  $\pi$  که شامل منابع هم فرکانس بوده و در حالت دائمی سینوسی مطالعه می شود

معمولا این توان ظاهری در بحث فازورها و حالت دائمی سینوسی تا این مرحله از مطالعه مدارها کاربرد کمتری دارد و اهمیت آن بیشتر در مدارهای سه فاز مشخص خواهد شد. **توان غیر مصرفی یا راکتیو:** بر اساس تعریف توان متوسط، مصرفی یا اکتیو، گاهی توان دیگری تعریف می شود موسوم به توان راکتیو که آنرا به صورت زیر تعریف می نمائیم:

$$Q \equiv \frac{1}{2} V_m J_m \sin \phi \quad (8-76)$$

اهمیت انواع توانهای فوق در بحث مدارهای چند فاز بیشتر مشخص خواهد شد.

**توان مختلط:** تعریف دیگری از توان که معمولا در بحث مدارهای الکتریکی و پاسخ حالت دائمی سینوسی آنها اهمیت دارد، توان مختلط است. مجددا در شکل 8-41 اگر فازور ولتاژ  $V$  و مزدوج مختلط فازور جریان  $J^*$  نظیر به عنصر دلخواه ترسیم شده باشند، آنگاه توان مختلط را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$P_C = \frac{1}{2} V J^* = \frac{1}{2} V_m J_m e^{j(\angle V - \angle J)} \quad (8-77)$$

بر اساس تعاریف فوق دیده می شود که تساویهای زیر برقرارند:

$$P_C = P_{av} + jQ$$

$$\text{Re}[P_C] = P_{av} \quad \& \quad I_m[P_C] = Q$$

$$S = |P_C|$$

**تذکره ۱:** در تعریف فوق، حاصل توان های تعریف شده در هر مرحله دارای واحد وات است که به منظور آنکه بتوان این نوع توان را به شکل تفکیک شده بیان نمود، قرارداد می کنیم:

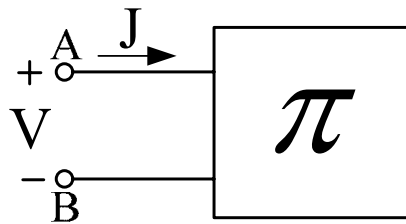
- واحد توان متوسط را با وات (WATT) بیان کنیم.

- واحد توان ظاهری را با ولت - آمپر بیان کنیم (که البته مجددا همان وات است).

- واحد توان راکتیو را با ولت - آمپر- راکتیویا به اختصار VAR بیان می نمائیم.

**تذکره ۲:** همانطوریکه گفته شد اگر  $P_{av}$  را برای یک عنصر محاسبه کنیم این توان همیشه مقدار غیر منفی خواهد داشت. اکنون فرض کنید که شبکه ای مطابق شکل 8-43 موجود است. اگر فازور ولتاژ و جریان اعمالی به این شبکه در سرهای A و B بترتیب  $V$  و  $J$  باشد، آنگاه با تعمیم مثبت بودن توان معرفی، در می یابیم که توان مصرفی کل شبکه نیز مثبت یا حداقل صفر است. برای چنین شبکه ای اگر امپدانس نقطه تحریک از سرهای A و B را  $Z_{D.P.}(j\omega)$  بنامیم داریم:

$$Z_{D.P.}(j\omega) = \frac{V}{J}$$



شکل 8-43 شبکه  $\pi$  در حالت دائمی سینوسی

از آنجا که  $P_{av} = \text{Re}[P_C]$  است پس:

$$P_{av} = \text{Re}[P_C] = \text{Re}[VJ^*]$$

$$= \text{Re}[Z_{D.P.} J J^*] = |J|^2 \text{Re}[Z_{D.P.}]$$

$$= |V|^2 \text{Re}[Y_{D.P.}^*] = |V|^2 \text{Re}[Y_{D.P.}]$$

حال مشروط بر آنکه  $P_{av} \geq 0$  باشد پس روابط زیر برقرارند:

$$\text{Re}[Z_{D.P.}(j\omega)] \geq 0 \quad \text{or} \quad R(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$$

$$\text{Re}[Y_{D.P.}(j\omega)] \geq 0 \quad \text{or} \quad G(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (\text{A-VA})$$

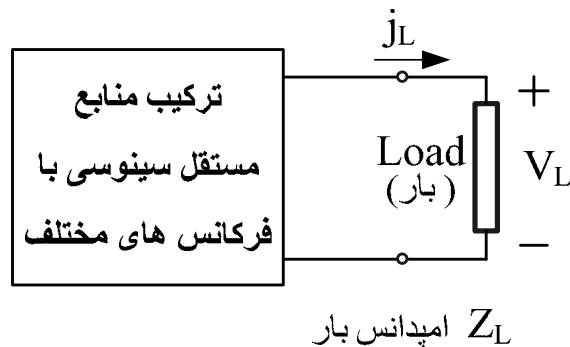
و چون  $P_{av} = \frac{1}{2} V_m J_m \cos \varphi$  می باشد آنگاه با توجه به اینکه  $\varphi = \angle Z_{D.P.}(j\omega)$  خواهیم داشت:



$$-\pi/2 \leq \angle Z_{D.P.}(j\omega) < \pi/2 \quad (8-79)$$

### 8-7-1 خاصیت جمع پذیری توان متوسط:

فرض کنید مطابق شکل مجموعه ای از منابع مستقل سینوسی با فرکانسهای مختلف، باری را تحریک می کنند بطوریکه  $v_L(t)$ ،  $j_L(t)$  به ترتیب ولتاژ و جریان لحظه ای آن عنصر است. ترکیب منابع بدو دسته منابع ولتاژ با اتصال سری به یکدیگر یا منابع جریان با اتصال موازی با هم، تقسیم می شود، بطوریکه اثر کل، جمع آنها ست. فرض کنید که مدار در حالت دائمی سینوسی است.



شکل 8-44 ترکیب منابع مستقل سینوسی با فرکانسهای مختلف که یک عنصر دلخواه را در حالت دائمی سینوسی تغذیه می کنند

فرض کنید منابع را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X_{S_i}(t) = X_{S_{m_i}} \cos(\omega_i t + \psi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-80)$$

آنگاه همانطوریکه دیدیم خروجی ولتاژ یا جریان عنصر بار برای ورودی  $i$  ام به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} v_{L_i}(t) &= V_{L_{m_i}} \cos[\omega_i t + \psi_{v_i}(\omega_i)] \\ j_{L_i}(t) &= J_{L_{m_i}} \cos[\omega_i t + \psi_{j_i}(\omega_i)] \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-81)$$

بطوریکه رابطه زیر برقرار است:

$$\varphi_i(\omega_i) \equiv \psi_{v_i}(\omega_i) - \psi_{j_i}(\omega_i) = \omega_i \text{ زاویهٔ امپدانس بار در فرکانس } \omega_i = \angle Z_L(\omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-82)$$

همانطوریکه قبلا دیدیم به کمک خاصیت جمع آثار هر یک از مقادیر  $v_{L_i}$  یا  $j_{L_i}$  را می توان بدست آورد. اکنون ولتاژ زمانی و جریان خروجی در حالت دائمی سینوسی برابر است با:

$$v_L(t) = \sum_{i=1}^n v_{L_i}(t) \quad (8-83)$$

$$j_L(t) = \sum_{i=1}^n j_{L_i}(t) \quad (8-84)$$

توان لحظه ای دو سر عنصر از ضرب ولتاژ و جریان روابط فوق بدست آید و البته می توان با گرفتن مقدار متوسط از این توان لحظه ای، به توان مصرفی (متوسط یا اکتیو) رسید.  
می توان نشان داد که پس از انتگرال گیری از توان لحظه ای ( که البته همیشه کار ساده ای نیست) داریم:

$$P_{av} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} V_{Lm_i} J_{Lm_i} \cos[\varphi_i(\omega_i)] \quad (8-85)$$

بدین معنی که توان مصرفی کل، جمع کلیه توان های مصرفی در فرکانس نظیر است. بعبارت دیگر، در حالت دائمی سینوسی، خاصیت جمع آثار برای توان متوسط، وقتی ورودیها دارای فرکانسهای متفاوت هستند، برقرار است.

### 8-7-2 مقادیر موثر یا ریشه میانگین مربعی (EFF-RMS):

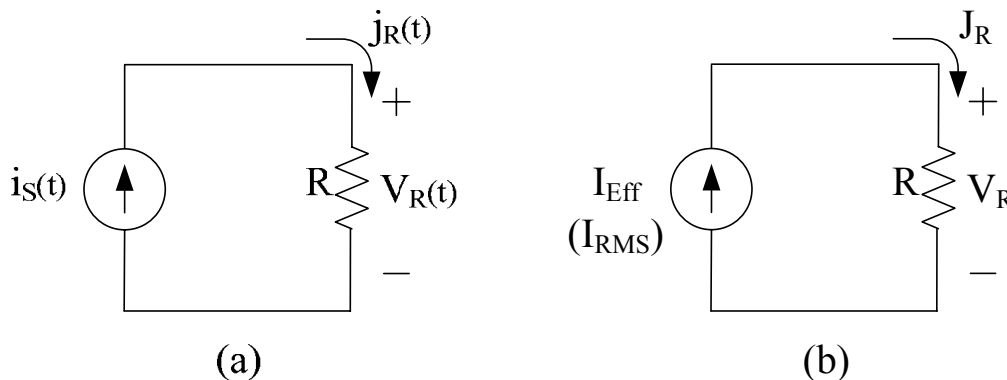
فرض کنید مقاومت  $R$  توسط منبع جریان سینوسی  $i_s(t)$  با معادله زیر تحریک می شود:

$$i_s(t) = I_{sm} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8-86)$$

در این صورت ولتاژ و جریان نظیر به مقاومت متصل شده به این منبع، شبیه به شکل 8-45a، برابر است با:

$$v_R(t) = Rj_R(t) = RI_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$j_R(t) = i_s(t) = I_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$$



شکل 8-45 (a) مقاومت تحریک شده با منبع جریان سینوسی (b) مداری که معادل با مدار (a) مصرف توان دارد

در طول یک پریود مقادیر متوسط ولتاژ و جریان درون مقاومت برابر صفرند. اما می دانیم که مقاومت با عبور جریان، مصرف توان داشته (توان متوسط) و به مرور زمان گرم خواهد شد. میتوان چنین تحریک مقاومتی را با یک مدار DC معادل، جایگزین نمود شبیه به آنچه در شکل 8-45 b دیده می شود. در مدار شکل 8-45b فرض شده است منبع جریان مستقیمی با جریان موثر  $I_{EFF}$

مقاومت را تحریک می کند. بمنظور آنکه دو مدار از لحاظ مصرف توان معادل باشند، بایستی متوسط توان مصرفی در مقاومت را برای شکل 8-45a با توان مصرفی مقاومت در شکل 8-45b یکسان فرض کرد که بتوان ارتباطی را بین  $I_{EFF}$  و  $i_s(t)$  نیز بدست آورد. بدین منظور ابتدا متوسط توان مصرفی در مدار 8-45a را بدست

می آوریم:

$$P(t) = v_R(t) j_R(t) = \frac{v_R^2(t)}{R} = R j_R^2(t)$$

$$= R I_{sm}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} R I_{sm}^2$$

(۸-۸۷)

به همین ترتیب توان مصرفی مقاومت در شکل 8-45b را می توان محاسبه نمود:

$$P_R = (I_{EFF})^2 \times R \quad (۸-۸۸)$$

شرط معادل بودن دو مدار شکل  $a$  و  $b$  از لحاظ مصرف توان آنست که روابط (8-87) و (8-88) دارای طرفین یکسانی باشند:

$$I_{EFF}^2 R = \frac{1}{2} R I_{sm}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T R [i_s(t)]^2 dt$$

بعبارت دیگر:

$$I_{EFF}^2 = \left( \frac{I_{sm}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left[ \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i_s(t)]^2 dt} \right]^2 \quad (۸-۸۹)$$

جریان  $I_{EFF}$  را جریان موثر می نامیم که بر اساس طرف راست رابطه (8-89) گاهی آنرا بنام ریشه میانگین مربعی (RMS) نیز میشناسیم. در این رابطه دیده می شود که مقدار موثر برای یک تابع به شکل سینوسی بصورت  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابر مقدار ماکزیمم سینوسی تعریف می شود. لذا در آنالیز حالت دائمی سینوسی:

$$\text{مقدار موثر} = \frac{\text{مقدار ماکزیمم}}{\sqrt{2}} \quad (۸-۹۰)$$

این رابطه در بسیاری از موارد بخصوص در محاسبات توان استفاده می شود. مثلا فرض کنید بخواهیم کلیه مقادیر توان را که در قسمتهای قبل دیدیم و همگی بر حسب مقادیر ماکزیمم ولتاژ و

جریان نوشته شده بودند، بر حسب مقادیر موثر بنویسیم. برای توان متوسط  $P_{av}$  از رابطه (8-73) داریم:

$$\begin{aligned} P_{av} &= V_{RMS} J_{RMS} \cos \varphi \\ &= V_{EFF} J_{EFF} \cos \varphi \end{aligned} \quad (8-91)$$

برای توان ظاهری نیز بکمک تعریف رابطه (8-75) داریم:

$$\begin{aligned} S &= V_{RMS} J_{RMS} \\ &= V_{EFF} J_{EFF} \end{aligned} \quad (8-92)$$

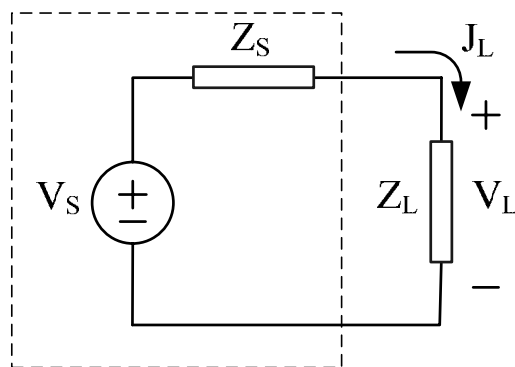
در مورد توان راکتیو از رابطه (8-76) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q &= V_{RMS} J_{RMS} \sin \varphi \\ &= V_{EFF} J_{EFF} \sin \varphi \end{aligned} \quad (8-93)$$

### 8-8 قضیه انتقال توان ماکزیمم:

$$\begin{aligned} P_C &= V_{RMS} J_{RMS} e^{j(\angle V - \angle J)} \\ &= V_{EFF} J_{EFF} e^{j(\angle V - \angle J)} \end{aligned} \quad (8-94)$$

فرض کنید که شبکه ای حاوی عناصر مختلف و منابع هم فرکانس موجود است و می خواهیم آن شبکه را به باری مثل  $Z_L$  متصل نمائیم. در حالت دائمی سینوسی می توان شبکه فوق را با مدار معادل تونن خود جایگزین کرده و سپس مطابق شکل 8-46 آنرا به بار  $Z_L$  اتصال داد (مدار معادل تونن شبکه فوق در خط چین نشان داده شده است).



شکل 8-45 مدار توصیف کننده قضیه انتقال توان ماکزیمم

در این نوع اتصال عمدتاً هدف داشتن حداکثر توان جذبی توسط بار از منبع است. اگر فرکانس (منابع یا) منبع (در مدار معادل)  $\omega$  باشد و فازور ولتاژ و جریان بار به ترتیب با  $V_L$ ،  $J_L$  نشان دهیم، آنگاه توان متوسط مصرفی توسط بار (تحویل داده شده از منبع به بار) با فرض آنکه این مقادیر، مقادیر ماکزیمم فازوری باشند برابر است با:

$$P_{av} = \frac{1}{2} |J_L|^2 \operatorname{Re}[Z_L(j\omega)] \quad (8-95)$$

اما می دانیم که در مدار شکل 8-46 مقدار  $J_L$  برابر است با:

$$J_L = \frac{V_S}{Z_S + Z_L} \quad (8-96)$$

با قرار دادن (8-96) در (8-95) داریم:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{|V_S|^2}{\left| \frac{V_S}{Z_S + Z_L} \right|^2} \operatorname{Re}[Z_L] \quad (8-97)$$

مشروط بر آنکه قرار دهیم:

$$Z_S(j\omega) = R_S(\omega) + jX_S(\omega)$$

$$Z_L(j\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega)$$

رابطه (8-97) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_S|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2} \quad (8-98)$$

اکنون هدف تعیین مقادیری از  $X_L$  و  $R_L$  (یا به عبارت معادل  $Z_L$ ) بصورتی است که رابطه (8-98) در ازاء آن حداکثر شود. از آنجا که این رابطه، یک تابع دو متغیره است پس به جهت حداکثر نمودن آن بایستی مشتق جزئی  $P_{av}$  را نسبت به  $X_L$ ،  $R_L$  صفر گذاشته تا مقادیر مناسب امپدانس بار بدست آید پس:

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0 \quad (8-99a)$$

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial X_L} = 0 \quad (8-99b)$$

به منظور یافتن مقدار مناسب  $Z_L$  می توان ابتدا از رابطه (8-99b) شروع کرد. نتیجه این رابطه حاصل زیر است:

$$X_L = -X_S \quad (8-100)$$

با این مقدار از  $X_L$  رابطه (8-98) بصورت زیر می آید:

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_S|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2} \quad (8-101)$$

اکنون با اعمال شرط (8-99a) به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$R_L = R_S \quad (8-102)$$

و لذا با ترکیب روابط (8-100) و (8-102) داریم:

$$\begin{aligned} Z_L &= R_L + jX_L = R_L - jX_S \\ &= R_S - jX_S = Z_S^* \end{aligned} \quad (8-103)$$

و عبارت دیگر:

"اگر در مدار شکل 8-46 بخواهیم حداکثر توان از منبع توسط بار  $Z_L$  جذب شود آنگاه

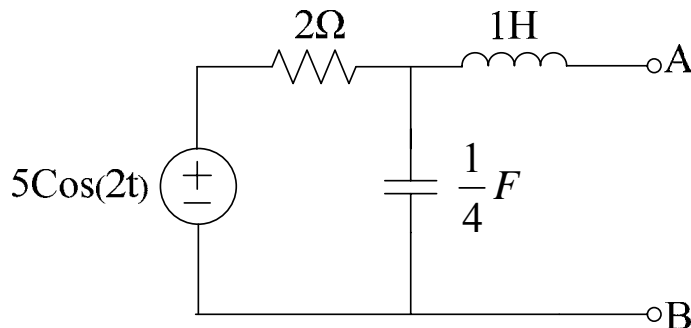
لازم است که امپدانس بار و امپدانس  $Z_S$  مزدوج مختلط یکدیگر باشند."

توجه کنید که با چنین انتخابی این حداکثر توان بر طبق رابطه (8-101) برابر است با:

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{2} |V_S|^2 \frac{1}{4R_S} = \frac{1}{2} |V_S|^2 \frac{1}{4R_L} \\ P_{av} &= \frac{1}{8} \frac{|V_S|^2}{R_S} \end{aligned} \quad (8-104)$$

**تذکره:** اگر در مدار شکل 8-46، رابطه (8-103) برقرار باشد مدار را اصطلاحاً یک مدار تطبیق شده می نامیم. بعلاوه از آنجا که توان متوسط بار مطابق رابطه (8-104) می تواند همان توان متوسط مصرفی در  $Z_L$  نیز باشد، پس در حالت تطبیق شده نصف توان تولیدی از منبع در مقاومت (یا با عنوان دقیقتر  $\text{Re}[Z_L]$ ) و نصف دیگر در مقاومت  $\text{Re}[Z_S]$  منبع تلف خواهد شد.

مثال 17: فرض کنید که می خواهیم امپدانس بار  $Z_L$  را به سرهای A و B از شکل زیر متصل نمائیم. معین کنید که این امپدانس چقدر باشد تا بتوان در حالت دائمی سینوسی حداکثر توان منبع را بدون بار تزریق نمود؟ اگر بخواهیم این امپدانس را از ترکیب و مقاومت ایجاد کنیم، مقادیر عناصر را تعیین کنید و سپس مشخص نمائید حداکثر توان جذب شده چقدر است؟



شکل 8-47 مدار مثال 17

در این مدار  $V_S = 5$  و  $Z_S$  از ترکیب موازی امپدانس 2 اهم (نظیر به مقاومت 2 اهم) همچنین امپدانس  $-j2$  اهم (نظیر خازن  $\frac{1}{4}F$ ) وقتی با امپدانس  $j2$  اهم (نظیر به

سلف  $1H$ ) سری می شوند، بدست می آید و برابر است با:

$$\frac{2 \times (-j2)}{2 + (-j2)} + j2 = 1 + j \Omega$$

لذا امپدانس  $Z_L$  بایستی بمنظور شرط تطبیق به شکل زیر باشد:

$$Z_L = 1 - j$$

اگر قرار باشد این امپدانس را از طریق ترکیب سری خازن و مقاومت بدست آوریم خواهیم داشت:

$$Z_L = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$$

و لذا با  $\omega = 2$  مقدار مقاومت بار برابر با 1 اهم و ظرفیت خازن نظیر برابر با  $\frac{1}{2}F$  بدست

خواهد آمد. نهایتاً حداکثر توان جذب شده با توجه به رابطه (8-104) برابر است با:

$$P_{av} = \frac{1}{8} \times \frac{5^2}{1} = \frac{25}{8} \text{ watt}$$

