# فصل ۲

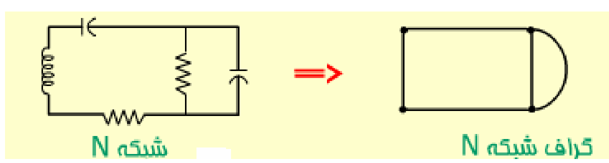
## گرافهاي شبكه و قضيه تلگان

در فصل ۱ مروري بر مفاهيم مهم و خواص مدارهاي الكتريكي داشتيم و بطور خلاصه مطالب مطرح شده در دروس مدارهاي الكتريكي را ياد آوري نموديم. از اين به بعد هدف تجزيه و تحليل و تعيين خواص يك شبكه، بهر پيچيدگي كه باشد بوده و در اين راستا روشهاي منظمي را معرفي خواهيم نمود. در يك شبكه فرض براينست كه تمامي اجزاء آن، مقاومتها،خازنها، سلف‌هاي تزويج شده ترانسفورماتورها،منابع وابسته و نابسته فشرده بوده و قابل مدلسازي هستند. همچنين اجزاء شبكه ممكن است خطي يا غير خطي،پسيوياكتيو، تغيير پذير يا تغيير ناپذير بازمان باشند.

## ۲-۱) مفهوم گراف يك شبكه

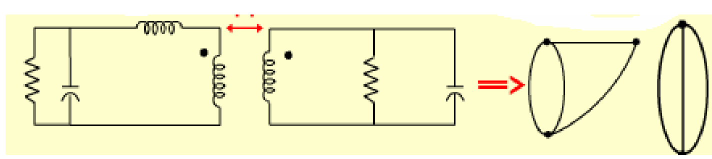
چون قوانين كيرشف صرفاً بيان محدوديتهايي بر روي ولتاژها و جريانهاي شاخه‌هاست لذا از ماهيت اجزاء مدار صرفنظر كرده و براي اين منظور هر جزء شبكه را با يك شاخه تعويض و در دو سر هر شاخه را با نقطه‌هاي سياهي كه گره  مي‌ناميم نشان مي‌دهيم. نتيجه اين عمل يك گراف مي‌باشد. بعبارت ديگر :منظور از گراف دسته‌اي از گره‌ها بهمراه دسته‌اي از شاخه‌هاست بشرط آنكه هر شاخه در هر سرش بيك گره ختم شود.

**مثال ۱:** گراف شبكه (۲-۱) را مشاهده مى كنيد.




شكل (۲-۱)

**مثال ۲:** گراف شبكه (۲-۲) را مشاهده مى كنيد.



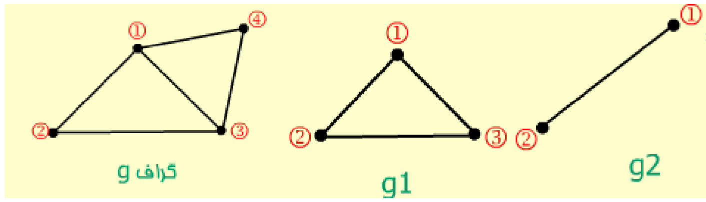
شكل (۲-۲)

همچنانكه از مثال ۲ پيداست گراف يك شبكه تزويج مغناطيسي M شبكه را نشان نمي‌دهد زيرا M به خاصيت شاخه‌ها مربوط است و لذا يك خاصيت گراف N نيست.

### ۲-۱-۱) زير گراف (sub graph)

$g_1$ را يك زير گراف نامند اگر خود يك گراف بوده و هر گره آن يك گره g و هر شاخه آن يك شاخه g باشد.

**مثال :** برخى از زيرگرافهاى يک گراف در شكل (۲-۳) نشان داده شده است.



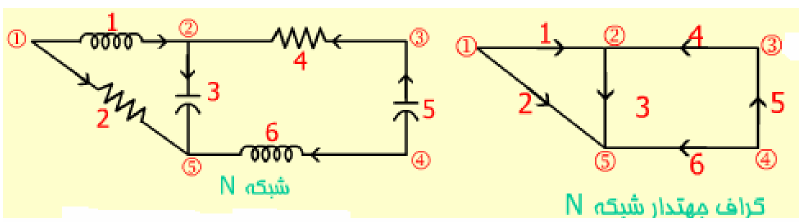

شكل (۳-۲)

يك زير گراف متشكل از يك گره را يك زير گراف سوده (Degenerate) نامند.

### ۲-۱-۲) گراف جهتدار (oriented graph)

براي يك شبكه معلوم N با در نظر گرفتن جهات قراردادي متناظر براي ولتاژ و جريان شاخه‌ها مي‌توان يك گراف جهتدار مشخص نمود. منظور از يك گراف جهتدار دسته‌اي از گرهها توأم با دسته‌اي از شاخه‌هاي جهتدار است كه در آن هر شاخه در هر يك از سرهاي آن به يك گره ختم مي‌شود.

**مثال:** گراف جهت دار شبكه در شكل (٤-۲) نشان داده شده است.




شكل (٤-۲)

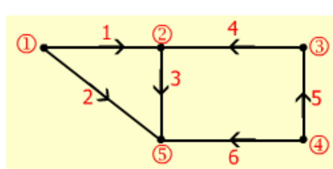
### ماتريس تلاقي گره با شاخه (Incidence matrix)

فرض كنيد يك گراف جهتدار از b شاخه و $n_t$ گره تشكيل شده باشد و تمام گرهها و شاخه‌ها را بطور دلخواه شماره‌گذاري شده باشد. ماتريس تلاقي گره با شاخه $\overline{A}_a$ به يك ماتريس مستطيلي با $n_t$ سطر و b ستون گفته مي‌شود بطوريكه : $\overline{A}_a = [a_{ik}]_{n_t \times b}$

$$a_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر جهت جريان شاخه k از گره i خارج شود.} \\ -۱ & \text{اگر جهت جريان شاخه k به گره i اوارد شود.} \\ ۰ & \text{اگر شاخه k با گره i تلاقي نداشته باشد.} \end{cases}$$

چون هر شاخه تنها از يك گره خارج يا وارد مي‌شود هر ستون ماتريس $\overline{A}_a$ فقط شامل يك ۱+ و ۱- بوده و ساير درايه های آن صفر خواهد بود.

**مثال :** در گراف جهتدار زير ماتريس تلاقي گره را بنويسيد.



شكل (۵-۲)

**حل:** با توجه به اینکه گراف دارای ٥ گره و ٦ شاخه است پس ماتریس تلاقی گره با شاخه یک ماتریس ٥×٦ بصورت زیر می باشد:

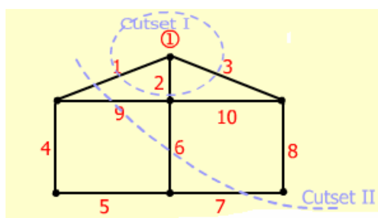
$$\overline{A}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{5\times 6}$$

**نتيجه :** هر گراف جهتدار داراي يك ماتريس تلاقي $\overline{A}_a$ و هر ماتريس $n_t \times b$ با خاصيت اينكه هر يك از ستونهاي آن داراي يك ١+ و ١- و بقيه عناصر صفر داراي يك گراف جهتدار مي‌باشد.اين ماتريس روش استانداري را براي توصيف كامپيوتري بهم پيوستن اجزاء مدار ارائه مي‌نمايد.

### ٢-٢-١) كات ست (cutset)

مجموعه‌اي از شاخه‌هاي يك گراف را كات‌ست گويند بشرط آنكه اگر تمام شاخه‌ها را حذف كنيم گراف به دو قسمت مجزا تقسيم شود و حذف همه آنها بجز يكي گراف همچنان پيوسته باقي بماند.

**مثال :** در گراف شکل (٦-٢) تعدادی از کات ست ها مشخص شده است.




شکل (٦-٢)

-مجموعه شاخه‌هاي $\{1,2,3\}$ تشكيل يك كات ست را مي‌دهند.

**نكته:** گره ١ بتنهايي خود يك زير گراف مي‌باشد.

-مجموعه شاخه‌هاي $\{1,9,6,7\}$ تشكيل يك كات ست را مي‌دهند.

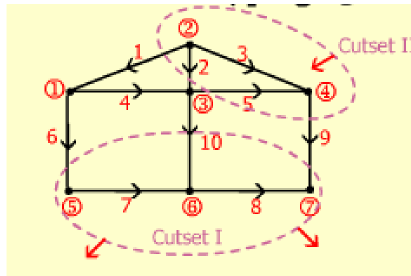
### ٢-٣) قانون جريان كيرشف (kcl) دركات ست‌ها

مجموع جبري جريان تمام شاخه‌هاي يك كات ست مساوي صفر است. براي اعمال kcl در يك كات‌ست ابتدا يك جهت قرار دادي دلخواه براي كات ست تعيين كرده و جريان شاخه‌هايي كه هم جهت با جريان كات ست هستند با علامت + و در خلاف جهت كات ست را با علامت- نشان ميدهيم.

**مثال:**در گراف شکل(٨-٢) kcl در کات ست I,II بصورت زيرخواهدبود:

$$kcl \quad at \quad I: -j_6 - j_9 - j_{10} = 0$$

$$kcl \quad at \quad II: -j_1 - j_2 + j_5 - j_9 = 0$$



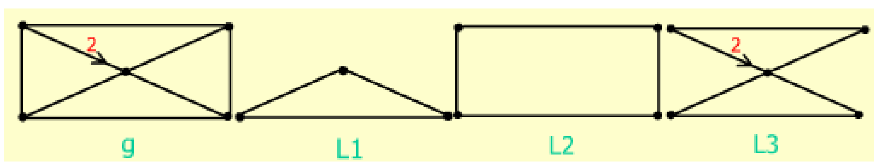

شكل (۸-۲)

دقت کنید که جهت کاست‌ست I از سمت داخل به خارج و جهت کات‌ست II از خارج به داخل فرض شده است.

## حلقه و قانون ولتاژ کیرشف kvl

زیر گراف L از گراف g را حلقه نامیم اگر: L متصل بهم (پیوسته ) باشد و هرگره از L فقط به دو شاخه وصل شده باشد.

**مثال:** در شکل (۹-۲) تعدادی زیر گراف نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می کنید $L_1$ , $L_2$ حلقه (loop) و زیر گراف $L_3$ حلقه نیست.




شكل (۹-۲)

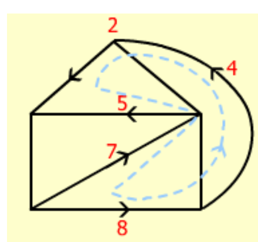
### ۱-٤-۲) Kvl در حلقه‌ها

جمع جبري ولتاژ تمام شاخه‌هايي كه در يك حلقه قرار دارند مساوي صفر است براي اعمال kvl در حلقه دلخواه L : ابتدا يك جهت دلخواه براي حلقه در نظر گرفته و اگر جهت جريان شاخه هم جهت با جهت حلقه باشد ولتاژ شاخه را با علامت + در غير اينصورت − بكار مي‌بريم.

**مثال:** در گراف جهتدار زیر KVL را در حلقه متشکل از شاخه‌هاي $\{2,4,5,7,8\}$ بنویسید.

جهت دلخواه حلقه را در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت فرض می‌کنیم:

$$kvl : +v_4 + v_2 - v_5 - v_7 + v_8 = 0$$



شکل (۱۰-۲)

### ۲-۵) قضيه تلگان (Tellegan's theorm)

براي شبكه فشرده دلخواه N (شامل هر تعداد اجزاء خطي يا غير خطي ، پسيو يا اكتيو ، تغيير پذير يا ناپذير بازمان ،كه g گراف جهتدار آن داراي b شاخه و $n_t$ گره است و همچنين ولتاژ و جريان شاخه‌ها بصورت جهات قراردادي متناظر انتخاب شده‌اند داريم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k\, j_k(t) = 0 \qquad (۲-۱)$$

$v_k(t)$ ، $j_k(t)$ ولتاژ و جريان شاخه k ام و $v_k(t)\,J_K(t)$ توان لحظه‌اي تحويلي به شاخه k ام مي‌باشد. همچنين اگر $\hat{v}_1(t), \hat{v}_2(t), \ldots, \hat{v}_b(t), \hat{j}_1(t), \hat{j}_2(t), \ldots, \hat{j}_b(t)$ دسته ديگر از ولتاژ جريان شاخه‌هاي همان شبكه يا شبكه‌اي ديگر كه داراي گراف يكسان با شبكه N بوده (نيز بطور يكسان شماره‌گذاري شده باشند) و در همان محدوديتهای KCL,KVL صدق كنند خواهيم داشت.

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \quad \hat{j}_k(t) = 0 \qquad (۲-۲)$$

و نيز مي‌توان نوشت :

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\, \hat{j}_k(t) = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k(t)\, j_k(t) = 0 \qquad (۲-۳)$$

**اثبات:** در فصل بعد اثبات مي‌شود.

### ۲-۶) كاربردهاي قضيه تلگان

**۲-۶-۱)اثبات اصل بقاي انرژي:** براساس بيان اول قضيه تلگان براي هر شبكه دلخواه داريم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\, j_k(t) = 0 \quad \forall\ t \qquad (۲-٤)$$

$v_k(t)\, j_k(t)$ تواني است كه شبكه در لحظه t به شاخهk تحويل مي‌دهد و قضيه تلگان مي‌گويد: مجموع توان‌هاي تحويل شده به شاخه‌هاي شبكه در هر لحظه برابر با صفر است. به عبارت ديگر مجموع تواني كه توسط منابع نابسته به شبكه تحويل داده می شود مساوی مجموع توانی است كه توسط تمام شاخه های ديگر شبكه جذب می شود. اين مطلب بدين معني است كه KCL,KVL تا آنجا كه مدارهاي فشرده مورد توجه است اصل بقاي انرژي را لازم ميدارند.

در شبكه‌هاي RLC خطی تغيير ناپذير بازمان انرژي يا در مقاومتها با شدت $R_k\, j_k^2(t)$ (در مقاومت k ام) تلف مي‌شود يا به صورت انرژي مغناطيسي در سلف‌ها به ميزان $\frac{1}{2} L_K\, J_K^2(t)$ و يا به صورت انرژي الكتريكي در خازنها به ميزان $\frac{1}{2} c_k\, v_k^2(t)$ ذخيره مي‌شود.

### ۲-۶-۲)اصل بقاي توان مختلط

يك شبكه خطي تغيير ناپذير بازمان را در حالت دائمي سينوسي در نظر گرفته فرض كنيد اين شبكه تنها داراي يك منبع جريان سينوسي در شاخه ۱ باشد . ولتاژ و جريان شاخه k ام

را با فازورهاي آنها $(j_k, v_k)$ نشان مـي‌دهـيم ... واضـح اسـت كـه محـدوديت‌هـايي كـه $(j_k, v_k)$ بوسيله KCL,KVL اعمال مي‌شود در فازورهاي ولتـاژ يـا جريـان شـاخه‌هـا نيـز صـدق مـي‌كننـد بنابراين قضيه تلگان برحسب فازور ولتاژ وجريانها نيز قابل بيان است به عبارت ديگر داريم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\, j_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} V_k J_k = 0 \qquad (۲-۵)$$

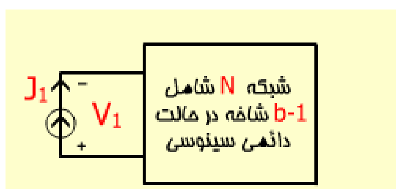
با استفاده از قضيه تلگان و اينكه مـزدوج فازورهـاي $j_1, j_2, \ldots, j_b$ نيـز در تمـام محـدوديت‌هـاي kcl صدق می کنند می توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} V_k J_k^{\,*} = 0 \qquad (۲-٦)$$

با توجه به شكل نشان داده شده $J_1, V_1$ فازورهاي ولتاژ و جريان متناظر منبع جريان ورودي بـوده و $-\frac{1}{2}V_1 J_1^*$ توان مختلطي است كه توسط اين منبع به بقيه شبكه تحويل داده می شـود رابطـه فوق را می توان بصورت زير نوشت:

$$-\frac{1}{2}V_1 J_1^* = \sum_{k=2}^{b} \frac{1}{2} V_k J_k^* \qquad (۲-۷)$$

رابطه فوق مي‌گويد كه كل توان مختلطي كه بوسيله منبع نابسته (يا در حالت كلـی تـر منـابع نابسـته) به شبكه N تحويل مي‌شود مـساوي مجمـوع توانهـای مختلطـي اسـت كـه بوسـيله بقيه شاخه‌هاي ديگر شبكه N دريافت مي‌شود.




### ۲-٦-۳) خواص امپدانس نقطه تحريك

از قضيه اصل بقاي توان مختلط مي‌توان براي بررسـي خـواص امپـدانس نقطـه تحريـك اسـتفاده نمود. امپدانس نقطه تحريـك $Z_{in}(j\omega)$ شـبكه يـك قطبـي خطـي ، تغييـر ناپـذير بازمـان N مطـابق شكل بالا را كه شامل مقاومتها ،سـلف‌ها و خازنها و ترانسـفورماتورها مي باشد در فركانس زاويه ای $\omega$ بوسيله زير محاسبه می شود.

$$Z_{in}(j\omega) = -\frac{V_1}{J_1} \qquad (۲-۸)$$

اگر شـاخه‌هـاي درون N از ۲ تا b شــماره گـذاري شـده و فازورهـاي جريـان شـاخه‌هـا را بـا $J_K$ و امپدانس هاي شاخه‌ها را با $Z_k$ نشان دهيم مي‌توان بكمك قضيه بقاي توان متخلط نوشت:

$$Z_{in}(j\omega)\,|\, j_1 \,|^2 = \sum_{k=2}^{b} Z_k \,|\, J_k \,|^2 \Rightarrow Z_{in}(j\omega) = \frac{1}{|\, J_1 \,|^2} \sum_{k=2}^{b} Z_k \cdot |\, J_k \,|^2 \qquad (۲-۹)$$

با استفاده از رابطه اخير مي‌توان برخي از خواص امپدانس نقطه تحريك يك شبكه خطي تغييـر ناپذير بازمان بشرح زير تعيين نمود.

### ۲-۶-۳-۱) شبکه‌هاي مقاومتی

دراین حالت همه $z_k$ ها اعداد حقیقی مثبت خواهند بود. $Z_K = R_k$ از امپدانس نقطه تحریک یک شبکه مقاومتی دارای خاصیت زیر است:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}] \geq 0 \ , \ \mathrm{Im}[Z_{in}] = 0 \qquad (۲-۱۰)$$

### ۲-۶-۳-۲) شبکه‌هاي مقاومتي سلفي (RL)

در این حالت $Z_k$ با يك عدد حقيقي مثبت $R_k$ و یا یک عدد موهومی خالص بصورت $j\omega L_k$ است که در آن $R_k>۰$ $L_K>۰$ بدین ترتیب :

$$\mathrm{Re}[Z_{in}] \geq 0, \mathrm{Im}[Z_{in}] \geq 0 \qquad (۲-۱۱)$$

و یا بطور معادل $0 \leq \angle Z_{in}(j\omega) \leq 90^0$ بطوریکه $\angle Z_{in}$ زاویه امپدانس نقطه تحریک می باشد.

### ۲-۶-۳-۳) شبکه‌هاي مقاومتي خازني(RC)

در این حالت $Z_K$ یا يك عدد حقيقی مثبت $R_K$ یا يك عدد موهومی خالص به صورت $\frac{1}{j\omega C_K}$ بوده و بنابراین امپدانس نقطه تحريك داراي خاصيت بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}] \geq 0 \quad , \quad \mathrm{Im}[Z_{in}] \leq 0 \qquad (۲-۱۲)$$

یا بطور معادل:

$$-90 \leq \angle Z_{in}(j\omega) \leq 0$$

### ۲-۶-۳-٤) شبکه‌هاي سلفي – خازني (LC)

در این حالت $Z_K$ها يكي از اعداد موهومي خالص $j\omega L_K$ یا $\frac{1}{j\omega L_K}$ بوده و بنابراین :

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] = 0 \ \ \forall \ \omega$$

یا بطور معادل : $\angle Z_{in}(j\omega) = \pm 90^0$

### ۲-۶-۳-۵) شبکه‌هاي مقاومتي – سلفي – خازني (RLC)

در این حالت $Z_K$ يكي از جملات $R_K$ یا $j\omega L_k$ یا $\frac{1}{j\omega c_k}$ بوده و $Z_{in}(j\omega)$ شامل تعدادي از جملات :

$$R_k|J_k|^2 \ , \quad j\omega L_k|J_k|^2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{j\omega c_k}|J_k|^2$$

مي‌باشد از این رو $Z_{in}(j\omega)$ عدد مختلطي بوده كه جزء حقیقی آن بزرگتریا مساوي صفر بود. و جزء موهومي آن مثبت یا منفي خواهد بود. بنابراین امپدانس نقطه تحريك يك شبكه RLC خطي تغيير ناپذير بازمان داراي جزء حقيقی نامنفي است و:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] \geq 0 \quad \forall \omega \qquad \mathrm{Im}[Z_{in}(j\omega)] \overset{<0}{>} 0 \qquad (۲-۱٤)$$

یا بطور معادل:

$$-90^0 \leq \angle Z_{in}(j\omega) \leq 90^0 \ \forall \omega$$

## ٢-٦-٤) امپدانس نقطه تحريك ،توان تلف شده و انرژي ذخيره شده

شبكه RLC خطي تغيير ناپذير بازمان قبل كه تنها توسط يك منبع جريان سينوسي تحريك مي‌شود را در نظر گرفته و ديديم كه توان مختلطي كه منبع به شبكه تحويل مي‌دهد بصورت زير بدست مي‌آيد:

$$P = \frac{1}{2} Z_{in}(j\omega) \mid J_1 \mid^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{b} Z_k(j\omega) \mid J_k \mid^2 \qquad (٢\text{-}١٥)$$

با توجه به اينكه شبكه متشكل از سلفها ، خازن‌ها و مقاومت‌ها مي‌باشد امپدانس $Z_k$ به يكي ازصورتهای $R_K$, $j\omega L_k$ يا $\frac{1}{j\omega c_k}$ خواهد بود. بنابراين طرف راست رابطه فوق بصورت زير قابل بيان است:

$$P = \frac{1}{2} \sum_i R_i \mid J_i \mid^2 + \frac{1}{2} \sum_k j\omega L_k \mid J_k \mid^2 + \frac{1}{2} \sum_l \frac{1}{j\omega C_l} \mid J_l \mid^2 \qquad (٢\text{-}١٦)$$

در واقع جملات متناظر با مقاومتها، سلفها و خازنها بصورت مجموع‌هاي جداگانه نوشته شده‌اند. اين مجموع مجدداً به صورت زير قابل بيان خواهد بود:

$$P = \frac{1}{2} \sum_i R_i \mid J_i \mid^2 + 2 j\omega \left( \sum_k \frac{1}{4} L_k \mid J_k \mid^2 - \sum_l \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 C_l} \mid J_l \mid^2 \right) \qquad (٢\text{-}١٧)$$

باتوجه به اينكه متوسط توان $R_i j_i^2(t)$ ( در طول يك پريود) بصورت $\frac{1}{2} R_i \mid J_i \mid^2$ و متوسط $\frac{1}{2} L_k j_k^2(t)$ برابر با $\frac{1}{4} L_k \mid J_k \mid^2$ و متوسط $\frac{1}{2} C_l {v_l}^2(t)$ برابر با $\frac{1}{4} C_l \mid v_L \mid^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 C_l} \mid J_l \mid^2$ مي‌باشد مي‌توان معادله آخر را برحسب $Z_{in}(j\omega)$ بصورت زير نوشت:

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{1}{\mid J_1 \mid^2} \left[ 2 P_{av} + 4 j\omega (\varepsilon_m - \varepsilon_E) \right] \qquad (٢\text{-}١٨)$$

كه در رابطه فوق $P_{av}$, $\varepsilon_E, \varepsilon_M$ به ترتيب توان متوسط تلف شده ،انرژي مغناطيسي متوسط ذخيره شده و انرژي الكتريكي متوسط ذخيره شده در شبكه خواهد بود.