فصل ششم

اعداد مختلط

نظریه توابع با متغیر مختلط، یکی از معتبرترین شاخه های ریاضی است که ریاضیدانان، فیزیکدانان و دیگر دانشمندان، از آن استفاده می کنند. اعداد مختلط را ریاضیدانان در قرن شانزدهم درپی جواب عمومی معادله درجه دو و سه ابداع کردند. لئونارد اولر در سال 1777 نماد i را با ویژگی $i^2 = -1$ معرفی کرد. درنتیجه جوابهای معادله $x^2 + 1 = 0$ برابر $\pm i$ گردید. نماد i را یکه موهومی می نامند.

مجموعه اعداد مختلط : این مجموعه را به علامت C نمایش داده و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$C = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

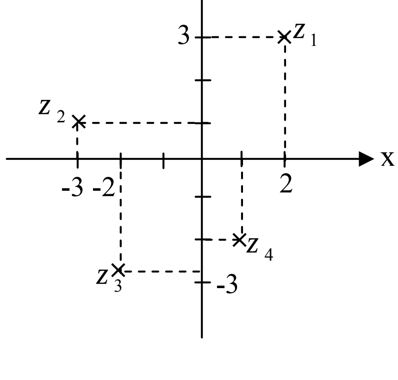
در عدد مختلط $z = a + ib$، a را قسمت حقیقی (Real Part) و b را قسمت موهومی (Imaginary Part) عدد مختلط (Complex number) z می گویند.

ملاحظه می شود که هر عدد حقیقی یک عدد مختلط نیز می باشد، زیرا کافی است قسمت موهومی آنرا صفر درنظر بگیریم، بعنوان مثال:

$$4 = 4 + 0i \qquad , \qquad \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} + 0i$$

نمایش اعداد مختلط : برای نمایش اعداد مختلط از صفحه اعداد استفاده می کنیم، قسمت حقیقی را بر روی محور x و قسمت موهومی را بر روی محور y نمایش می دهیم، محل تقاطع آنها بیانگر عدد مختلط مربوطه می باشد.

مثال 1: اعداد مختلط $z_1 = 2 + 3i$، $z_2 = -3 + i$، $z_3 = -2 - 3i$ و $z_4 = 1 - 2i$ را نمایش دهید.



برابری دو عدد مختلط : دو عدد مختلط $z_1=a+ib$ ، $z_2=c+id$ با هم برابرند اگر و تنها اگر قسمتهای حقیقی آنها با هم و قسمتهای موهومی آنها نیز با هم برابر باشند، بعبارت دیگر

$$a+ib=c+id \Leftrightarrow a=c \ , \ b=d$$

اعمال بر روی اعداد مختلط : اگر $z_1=a+ib$ و $z_2=c+id$ باشد آنگاه:

$$z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)$$

$$z_1-z_2=(a-c)+i(b-d)$$

$$z_1\times z_2=(a+ib)(c+id)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

مزدوج یک عدد مختلط : اگر $z=a+ib$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه مزدوج آنرا به $\bar{z}$ نمایش داده و $\bar{z}=a-ib$ ، روابط زیر در مورد مزدوج اعداد مختلط به سادگی قابل اثبات است.

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

3) $z+\bar{z}=2\mathrm{R_e}(z) \quad , \quad z-\bar{z}=2i\,\mathrm{I_m}(z)$

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

قدر مطلق عدد مختلط : اگر $z=a+ib$ عدد مختلطی باشد، آنگاه $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ و درنتیجه $|z|^2=z\bar{z}$.

خواص قدر مطلق عدد مختلط : اگر z_1 و z_2 اعداد مختلطی باشند، آنگاه:

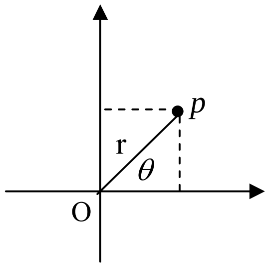
1) $|z_1|\geq 0 \ , \ |z_1|=0 \ \Leftrightarrow \ z_1=0$

2) $|\overline{z_1}|=|z_1|$

3) $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$

4) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

نمایش قطبی یا مثلثاتی اعداد مختلط :



اگر p یک نقطه از صفحه مختلط نظیر عدد مختلط $z = x + iy$ باشد، آنگاه با استفاده از شکل داریم:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

در صورتی که $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ همان قدر مطلق عدد مختلط است و θ زاویه ای است که خط op با جهت مثبت محور xها می سازد θ را دامنه عدد مختلط یا آرگومان می نامند.

بنابراین $\quad z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

برای هر عدد مختلط $z \neq 0$ فقط یک مقدار برای θ در فاصله $0 \le \theta \le 2\pi$ درنظر گرفته می شود، هر جواب ویژه θ را یک مقدار اصلی نامیده می شود.

مثال 2: اگر $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ باشد، آنگاه

$$x = 2 \ , \ y = 2\sqrt{3} \ , \ r = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین

$$z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

تذکر : عدد $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ نمایش می دهیم.

ریشه های n ام یک عدد مختلط : اگر $z = re^{i\theta}$ عدد مختلطی باشد، ریشه های nام آن اعدادی مانند $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$ بصورت $\omega_k = \rho e^{i\varphi_k}$ می باشد، بقسمی که

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

می باشد.

بنابراین ریشه های nام هر عدد مختلط عبارت از دقیقاً n عدد مختلط می باشد.

مثال 3 : ریشه های چهارم عدد $z=-16$ را پیدا کنید.

حل :

$$z=-16 \Rightarrow x=-16 \quad , \quad y=0 \Rightarrow r=16 \quad , \quad \tan\theta=0 \Rightarrow \theta=\pi$$

بنابراین $\rho=\sqrt[4]{16}=2 \quad , \quad \varphi_k=\dfrac{\pi+2k\pi}{4}$ برای $k=0,1,2,3$ می باشد.

$$k=0 \Rightarrow \varphi_0=\frac{\pi}{4} \quad , \quad k=2 \Rightarrow \varphi_2=\frac{5\pi}{4}$$

$$k=1 \Rightarrow \varphi_1=\frac{3\pi}{4} \quad , \quad k=3 \Rightarrow \varphi_3=\frac{7\pi}{4}$$

بنابراین ریشه های چهارم عدد $z=-16$ عبارتند از:

$$\omega_0=2e^{i\frac{\pi}{4}} \quad , \quad \omega_1=2e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad \omega_2=2e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad , \quad \omega_3=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

که دو به دو مزدوج یکدیگر می باشند.

مثال 4 : به کمک اعداد مختلط ثابت کنید:

$$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$

اثبات : با توجه به فرمول روموآور بر $n=3$ داریم:

$$(\cos\theta+i\ \sin\theta)^3=\cos(3\theta)+i\ \sin(3\theta)$$

اگر طرف چپ را به توان سه برسانیم داریم:

$$\cos^3\theta+i^3\sin^3\theta+3i\ \cos^2\theta\sin\theta+3i^2\sin^2\theta\cos\theta=\cos 3\theta+i\ \sin 3\theta$$

با توجه به اینکه دو عدد مختلط زمانی با هم برابرند که قسمتهای حقیقی آنها با هم و قسمتهای موهومی آنها نیز با هم برابر باشند، در اینصورت درستی روابط داده شده دیده می شود.

تمرینات :

1- اگر $z = x + iy$ باشد، قسمتهای حقیقی و موهومی عدد $\frac{z+2}{z-1}$ را تعیین کنید.

2- اگر $\frac{x-iy}{x+iy} = a+ib$ ثابت کنید $a^2 + b^2 = 1$.

3- با فرض اینکه اعداد مختلط z_1 و z_2 و z_3 در معادله زیر صدق کنند:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

ثابت کنید $|z_2 - z_1| = z_3 - z_1 = z_2 - z_3$.

4- ثابت کنید مثلثی با رئوس z_3 و z_2 و z_1 متساوی الاضلاع است اگر و فقط اگر:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

5- مقادیر $(-1)^{2/3}$ و $(-1)^{1/2}$ را محاسبه نمایید.

6- مقادیر اعداد زیر را بیابید.

$a) \quad (-16)^{\frac{1}{4}} \qquad b) \quad (i)^{\frac{1}{5}}$

$c) \quad (i)^{\frac{1}{4}} \qquad d) \quad (1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}} \qquad e) \quad (i-1)^{\frac{1}{2}}$

7- معادله $(z+1)^5 = z^5$ را حل کنید.

8- نشان دهید نقاط $z_1 = 3+i$ ، $z_2 = b$ و $z_3 = 4+4i$ رئوس مثلث قائم الزاویه هستند.

9- اعداد زیر را بصورت $a+ib$ بنویسید:

$a) \quad (-3)(\frac{i}{2}) \qquad c) \quad (-1+i)^2 \qquad e) \quad i^3(i+1)^2$

$b) \quad (8+i)-(5+i) \qquad d) \quad (\frac{2-i}{1/3})^2 \qquad f) \quad \frac{-1+5i}{2+3i}$

10- نشان دهید که عدد $z = -1+i$ در معادله $z^2 + 2z + 2 = 0$ صدق می کند.

توابع مختلط

تعریف : اگر برای هر متغیر z در S یک یا چند مقدار دیگر از متغیر مختلط مانند ω را نسبت دهیم، آنگاه مجموعه جفت های مرتب

$f=\{(z,\omega):z\in S\}$

را یک تابع مختلط روی S نامیده و با $\omega=f(z)$ نمایش می دهند. متغیر z را متغیر مستقل و ω را متغیر تابع می نامند.

دامنه تابع : مجموعه تمام مقادیر مختلط z را دامنه تعریف تابع و مقادیر $f(z)$ را برد تابع $\omega=f(z)$ می گویند. بعنوان مثال دامنه تعریف توابع، $f_1(z)=z^4-2z+1$ و $f_2(z)=|z|$ و $f_3(z)=\frac{1}{z^2+5}$ عبارت است از $D_{f_1}=D_{f_2}=C$ اما تابع f_3 در نقاط $z=\pm\sqrt{5}i$ تعریف نشده است.

هر تابع $f(z)$ را می توان به صورت دو جزء حقیقی و موهومی بنویسیم

$z=x+iy \quad , \quad u=u(x,y) \quad , \quad v=v(x,y)$

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

مثال : اگر $\omega=f(z)=z^2$ باشد، آنگاه:

$\omega=f(z)=(x+iy)^2=x^2+2ixy-y^2=(x^2-y^2)+2ixy$

بنابراین $u(x,y)=x^2-y^2$ و $v(x,y)=2xy$ می باشد.

حد توابع مختلط : تابع $\omega=f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد ω_0 است یعنی

$\lim_{z\to z_0}f(z)=\omega_0$ هرگاه: $\forall\zeta>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni \quad 0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-\omega_0|<\zeta$

تابع $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است هرگاه این تابع در z_0 دارای حدی برابر مقدار تابع در این نقطه باشد یعنی: $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$

مثال : نشان دهید که تابع $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ در نقطه $z=0$ حد ندارد.

حل : برای اثبات عدم وجود حد بایستی حداقل دو مسیر مختلف که به $z=0$ ختم می شود را بیابیم که حد تابع بر روی این دو مسیر مساوی نباشد.

مسیر اول (مسیر محور xها $y=0$) $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x+iy}=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{x})=\lim_{x\to 0}(1)=1$

مسیر دوم (مسیر محور yها $x=0$) $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x+iy}=\lim_{y\to 0}(\frac{-iy}{iy})=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$

تمرینات

1- هر یک از توابع زیر را بفرم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بنویسید:

الف) $f(z)=3z^2+5z+i+1$

ب) $g(z)=\frac{1}{z}$

ج) $h(z)=\frac{z+i}{z^2+1}$

د) $f(z)=\frac{2z^2+3}{z-1}$

2- اگر $f(z)=\frac{x^2}{x^2+y^2}+2i$، آیا حد f در $z=0$ موجود است.

3- تابع $f(z)$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{2z}{z+1} & z\neq -1\\ 1 & z=-1\end{cases}$$

معین کنید تابع $f(z)$ در چه نقاطی پیوسته می باشد.

مشتق توابع مختلط : اگر تابع $f(z)$ در ناحیه ای مانند S تعریف شده باشد، آنگاه مشتق $f(z)$ بصورت زیر تعریف می گردد:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

همچنین مشتق تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ بصورت زیر نیز تعریف می گردد.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

مثال : اگر $f(z)=e^{z}$ باشد، $f'(z)$ را بیابید.

حل :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{z+\Delta z}-e^{z}}{\Delta z}$$

$$=e^{z}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{\Delta z}-1}{\Delta z}=e^{z}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1+\Delta z+\frac{\Delta z^{2}}{2!}+\ldots+-1}{\Delta z}$$

$$=e^{z}\lim_{\Delta z\to 0}(1+\frac{\Delta z}{2!}+\ldots)=e^{z}$$

مثال : نشان دهید که تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست.

حل : نقطه ای دلخواه مانند z_0 درنظر می گیریم

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)-i(y_0-y)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

اکنون دو مسیر را درنظر می گیریم:

$y=y_0$ مسیر اول $=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(1)=1$

$x=x_0$ مسیر دوم $=\lim_{y\to y_0}\frac{y_0-y}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}(-1)=-1$

در نتیجه $f'(z)$ در هیچ نقطه ای وجود ندارد.

مثال : مشتق تابع $f(z)=z^{n}$ را بدست آورید.

حل :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^{n}-z^{n}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^{n}+nz^{n-1}\Delta z+n(n-1)z^{n-2}\Delta z^{2}+\ldots+\Delta z^{n}-z^{n}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+n(n-1)z^{n-2}\Delta z+\ldots+\Delta z^{n-1}\right]=nz^{n-1}$$

قضایای مشتق : اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه:

1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2) $\left[f(z).g(z)\right]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

4) $\left[(fog)(z)\right]' = \left[f(g(z))\right]' = g'(z).f'(g(z))$

مثال : اگر $f(z) = \sin(3z^2 + 4z - 1)$ باشد، مطلوبست $f'(z)$.

حل : اگر $f(z) = \sin u$ باشد، آنگاه $f'(z) = u'\cos u$ بنابراین

$$f'(z) = (6z + 4)\cos(3z^2 + 4z - 1)$$

تعریف تابع تحلیلی : تابع $f(z)$ روی ناحیه R از صفحه اعداد مختلط تحلیلی (Analytic) نامیده می شود اگر در تمام نقاط R مشتق پذیر باشد.

مثال : آیا تابع $f(z) = |z|^2$ تحلیلی است؟

حل : ابتدا $f'(z)$ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z.\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\overline{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.z + \overline{z} + \overline{\Delta z} \right\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.z + \lim_{\Delta z \to 0} \overline{z} + \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} \end{aligned}$$

اما

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} +1 \\ \text{یا} \\ -1 \end{cases}$$

بنابراین

$$f(z) = \begin{cases} z + \overline{z} \\ \text{یا} \\ z - \overline{z} \end{cases}$$

پس $f(z)$ تنها در $z=0$ مشتق پذیر است و در هیچ ناحیه ای تحلیلی نیست.

معادلات کوشی-ریمان

قـــضیه : فـــرض کنیــــد تــــابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطـــه $z_0=x_0+iy_0$ مــــشتق پذیر باشد، در اینصورت توابع u و v در روابط زیر صدق می کنند:

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y}$$

$$\frac{\delta v}{\delta x}=-\frac{\delta u}{\delta y}$$

این روابط به شرایط کوشی-ریمان موسوم می باشند.

اثبات : چون مشتق تابع در z_0 موجود است، پس حد زیر وجود دارد:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

با توجه به موجود مشتق بنابراین محاسبه حد مستقل از مسیر است یعنی

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x}=f'(z_0)$$

از طرف دیگر

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$
$$=-i\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta y}$$

با توجه به لزوم برابر بودن این دو مقدار داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y}-i\frac{\delta u}{\delta y}$$

از آنجا که دو عبارت مختلط زمانی با هم برابرند که قسمتهای حقیقی آنها با هم و قسمتهای موهومی آنها با هم برابر باشند داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y} \quad , \quad \frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\delta v}{\delta x}$$

شرط لازم برای اینکه تابع $f(z)=u+iv$ مشتق پذیر باشد آن است که شرایط کوشی-ریمان برقرار باشد.

توجه شود که برقراری روابط کوشی-ریمان برای مشتق پذیری تابع کافی نیست و شرط کافی بکمک قضیه زیر است.

قضیه : اگر مشتقات جزئی توابع u و v نسبت به x و y در $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) موجود و پیوسته باشند و در رابطه کوشی-ریمان صدق کنند، آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

معادلات کوشی-ریمان به شکل قطبی :

اگر $z=x+iy$ را به شکل قطبی در نظر بگیریم:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \quad , \quad r=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

آنگاه با استفاده از قانون زنجیره ای مشتق برای توابع دو متغیره داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta r}.\frac{\delta r}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta \theta}.\frac{\delta \theta}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta}\sin\theta \quad (1)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{\delta u}{\delta r}.\frac{\delta r}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta \theta}.\frac{\delta \theta}{\delta y}=\frac{\delta u}{\delta r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta}\cos\theta \quad (2)$$

به طریق مشابه

$$\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta r}(r\cos\theta)-\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta}\sin\theta \qquad (3)$$

$$\frac{\delta v}{\delta y}=\frac{\delta v}{\delta r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta}\cos\theta \qquad (4)$$

بنا به معادلات کوشی-ریمان

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y}\Rightarrow(\frac{\delta u}{\delta r}-\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta})\cos\theta-(\frac{\delta v}{\delta r}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta})\sin\theta=0 \quad (5)$$

همچنین

$$\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\delta v}{\delta x}\Rightarrow (\frac{\delta u}{\delta r}-\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta})\sin\theta+(\frac{\delta v}{\delta r}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta})\cos\theta=0 \quad (6)$$

طرفین تساوی (5) و (6) را به ترتیب در $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ضرب کرده و با هم جمع می کنیم تا داشته باشیم:

$$\frac{\delta u}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta}$$

به طور مشابه طرفین تساوی (5) و (6) را به ترتیب در $-\sin\theta$ و $\cos\theta$ ضرب کرده و در نتیجه:

$$\frac{\delta v}{\delta r}=\frac{-1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta}$$

بنابراین روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\frac{\delta u}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta}$$

$$\frac{\delta v}{\delta r}=-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta}$$

مثال : تابع $f(z)$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

نشان دهید که $f'(0)$ موجود نیست اما معادلات کوشی-ریمان در نقطه صفر برقرار است.

حل :

$$z\neq 0\Rightarrow f(z)=\frac{(\bar{z})^2}{z}=\frac{(x-iy)^2}{x+iy}=\frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2}$$

$$f(z)=\frac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2}+i\,\frac{y^3+3x^2y}{x^2+y^2}$$

بنابراین

$$u(x,y)=\frac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2} \quad , \quad v(x,y)=\frac{y^3+3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$$

$$\frac{\delta v}{\delta y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y-0}=1$$

بنابراین $\frac{\delta u}{\delta x}(0,0)=\frac{\delta v}{\delta y}(0,0)$ و نیز:

$$\frac{\delta u}{\delta y}=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=0$$

$$\frac{\delta v}{\delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

در نتیجه $\frac{\delta u}{\delta y}(0,0)=-\frac{\delta v}{\delta y}(0,0)$ بنابراین معادلات کوشی-ریمان برقرار است اما

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{(\bar{z})^2}{z}}{z}=\lim_{z\to 0}(\frac{\bar{z}}{z})^2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x-iy}{x+iy})^2$$

حاصل حد را بر روی دو مسیر محاسبه می کنیم:

$y=0$ مسیر اول $=\lim_{x\to 0}(\frac{x-0}{x+0})^2=\lim_{x\to 0}(1)^2=1$

$y=x$ مسیر دوم $=\lim_{x\to 0}(\frac{x-ix}{x+ix})^2=\lim_{x\to 0}(\frac{1-i}{1+i})^2=(\frac{1-i}{1+i})^2$

تمرینات

1- تابع $f(z)$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

در این صورت شرط کوشی-ریمان برقرار است اما $f'(0)$ وجود ندارد.

2- نشان دهید تابع $f(z)=\begin{cases}(1+i)\mathrm{I_m}(z^2) & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ در روابط کوشی-ریمان در $z=0$ صدق می کند. آیا f در $z=0$ مشتق پذیر است.

3- با فرض $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}}+ix^{\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ نشان دهید معادلات کوشی-ریمان در نقطه $z=0$ برقرار است اما f در این نقطه مشتق پذیر است.

توابع هارمونیک یا همساز : اگر h تابعی از دو متغیر حقیقی از x و y بر روی D باشد به طوری که مشتقات جزئی مرتبه دوم آن نسبت به x و y روی D پیوسته و در رابطه زیر صدق کند h را تابع هارمونیک یا همساز بر روی D می نامند:

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 h}{\delta y^2}=0$$

قضیه : اگر تابع $f(z)=u+iv$ بر روی دامنه D تحلیلی و مشتقات مرتبه دوم u و v نسبت به x و y پیوسته باشند، آنگاه u و v بر روی D هارمونیک هستند.

اثبات : تابع f بر روی D تحلیلی و در نتیجه مشتقات جزئی u و v نسبت به x و y موجود و در شرایط کوشی-ریمان صدق می کنند.

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y} \qquad (1)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\delta v}{\delta x} \qquad (2)$$

از روابط (1) و (2) به ترتیب نسبت به x و y مشتق می گیریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\dfrac{\delta^2 v}{\delta x\,\delta y}\\[2ex] \dfrac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\dfrac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta x}\end{cases}\Rightarrow \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta x\,\delta y}=\frac{\delta^2 v}{\delta x\,\delta y}-\frac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta x}=0$$

چون مشتقات جزئی v نسبت به x و y پیوسته و در نتیجه $\dfrac{\delta^2 v}{\delta x\,\delta y}=\dfrac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta x}$

بدین ترتیب می توان نشان داد که v هارمونیک است.

مزدوج همساز : اگر u تابع حقیقی و هارمونیک بر روی D باشد، آنگاه تابع هارمونیکی مانند v را مزدوج همساز u بر روی D می نامند اگر تابع $f(z)=u+iv$ روی D تحلیلی باشد.

مثال : اگر $u(x,y)=y^3-3x^2y$ باشد، آنگاه

الف) نشان دهید u همساز است

ب) مزدوج همساز u را بدست آورید.

حل :

$$\frac{\delta u}{\delta x}=6xy \;\;,\;\; \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=6y \;\;,\;\; \frac{\delta u}{\delta y}=3y^2-3x^2 \;\;,\;\; \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=6y$$

بنابراین

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=6y-6y=0$$

پس u همساز است. برای یافتن مزدوج همساز فرض کنیم v یکی از مزدوج های همساز u باشد آنگاه شرایط کوشی-ریمان را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=\dfrac{\delta v}{\delta y}\Rightarrow -6xy=\dfrac{\delta v}{\delta y}\Rightarrow v=-3xy^2+\varphi(x)\Rightarrow \dfrac{\delta v}{\delta x}=-3y^2+\varphi'(x)\\[2mm] \dfrac{\delta u}{\delta y}=\dfrac{-\delta v}{\delta x}\Rightarrow 3y^2-3x^2=-(-3y^2+\varphi'(x))\Rightarrow 3x^2=\varphi'(x)\Rightarrow \varphi(x)=x^3+c\end{cases}$$

بنابراین $v(x,y)=-3xy^2+x^3+c$

تذکر : اگر u مزدوج همساز v باشد، لزومی ندارد v مزدوج همساز u باشد.

مثال : تابع $f(z)=z^2$ را در نظر بگیرید

$$f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$$

تابع f همواره تحلیلی است بنابراین v مزدوج همساز u می باشد، حال آیا تابع u مزدوج همساز v می باشد.

$$g(z)=v+iu=2xy+i(x^2-y^2)$$

آنگاه

$$\frac{\delta u}{\delta x}=2y \;\;,\;\; \frac{\delta u}{\delta y}=2x$$

$$\frac{\delta v}{\delta y}=-2y \;\;,\;\; \frac{\delta v}{\delta x}=-2x$$

شرایط کوشی-ریمان فقط در نقطه صفر برقرار است، بنابراین g غیر تحلیلی است.

تمـرین : فـرض کنیـد تـابع f بـر دامنـه D تحلیلـی اســت، نـشان دهیـد اگـر هـر یـک از حالات زیر برقرار باشد، آنگاه f بر روی D ثابت است.

1- اگر $\overline{f(z)}$ بر روی D ثابت است.

2- $|f(z)|$ ثابت باشد.

3- f بر روی D حقیقی باشد.

2- مزدوج همساز توابع زیر را تعیین کنید

1) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$

2) $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

3) $u(x,y) = e^x \sin y$

3- اگر u و v روی دامنه D همساز باشند، ثابت کنید تابع

$$(\frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x}) + i(\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta v}{\delta y})$$

روی D تحلیلی است.

4- a را طـــوری تعیـــین کنیـــد کـــه $u(x,y) = x^2 + ay^2$ روی D همـــساز باشـــد، مـــزدوج همساز v را طوری تعیین کنید که $v(0,0) = 0$.

5- نشان دهید توابع $z\,\mathrm{R_e}\,z$ و $zI_m z$ در صفر مشتق پذیر بوده اما تحلیلی نیست.

توابع مقدماتی

تـابع نمـایی طبیعـی مخـتلط : تـابع حقیقـی نمـایی بـصورت $f(x) = e^x$ اســت بـا توجـه به فرمول اولر یعنی $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ تابع نمایی مختلط بصورت زیر است

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

خواص تابع نمایی:

1- تابع نمایی مختلط تابعی تام است یعنی در تمام نقاط مشتق پذیر است

$$(e^z)^1 = e^z \quad , \quad \forall z \in C$$

$$f(z) = e^z = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

$$f'(z) = \frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x} = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y) = e^z$$

2) $e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

با فرض $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ داریم:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\,\sin(y_1+y_2)\right] \\ &= \left[e^{x_1}(\cos y_1+i\,\sin y_1)\right]\left[e^{x_2}(\cos y_2+i\,\sin y_2)\right] \\ &= e^{z_1}\times e^{z_2} \end{aligned}$$

3) $\left|e^{z}\right|=\left|e^{x+iy}\right|=e^{x}$

4) تابع نمایی مختلط e^z متناوب است و دوره تناوب آن $2n\pi i$ (n عدد صحیح) می باشد.

5- تابع e^z در حالت کلی یک به یک نمی باشد و نمی توان مانند حالت تابع نمایی حقیقی برای آن تابع معکوس تعریف کرد.

تابع لگاریتم : اگر z یک عدد مختلط مخالف صفر باشد بطوری که $z=re^{i\theta}$ آنگاه تابع لگاریتم مختلط را که با $\ln z$ نمایش می دهند و بصورت زیر می توان تعریف کرد.

$$\ln z=\ln r+i\,\theta$$

هنگامی r قدر مطلق z و θ آرگومان z می باشد.

تابع لگاریتم مختلط را می توان به صورت های معادل زیر تعریف کرد.

$$\ln z=\ln\left|z\right|+iArg(z)\ ,$$
$$\ln z=\ln\left|z\right|+iArg(z)+2n\pi i\ \ ,\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

با توجه به چند مقداری بودن $Arg(z)$ نتیجه می شود که تابع لگاریتم چند مقداری است.

اگر تابع لگاریتم مختلط $\ln z$ را با $\theta_0\le Arg(z)<2\pi+\theta_0$ درنظر بگیرید آنگاه تابع لگاریتم در این حالت تک مقداری است برای مثال فرض کنید:

$$\ln z=\ln\left|z\right|+i\,\theta \qquad 0\le\theta<2\pi \qquad (\theta_0=0)$$
$$\ln z=\ln\left|z\right|+i\,\theta \qquad -\pi<\theta<\pi \qquad (\theta_0=0)$$

تابع تک مقداری $\ln z$ برای فاصله ویژه ای از $(\theta_0,\theta_0+2\pi)$ را یک شاخه از تابع لگاریتم می نامند و اگر $\theta_0=-\pi$ ، آنگاه یک شاخه اصلی از تابع لگاریتم بدست می آید.

قـــضیه : اگـــر $\ln z = \ln r + i\theta$ و $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ و $r > 0$ آنگـــاه تـــابع لگـــاریتم مـــشتق پـــذیر است و $\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$

اثبات : توجه کنید که $u(r,\theta) = \ln r$ و $v(r,\theta) = \theta$ در آن صورت

$$\frac{\delta u}{\delta r} = \frac{1}{r} \ , \ \frac{\delta v}{\delta \theta} = 1 \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta r} = \frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \theta}$$

$$\frac{\delta u}{\delta \theta} = 0 \ , \ \frac{\delta v}{\delta r} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{r}\frac{\delta u}{\delta \theta} = \frac{\delta v}{\delta r}$$

بنـــابراین شـــرایط کوشـــی-ریمـــان برقـــرار بـــوده و توابـــع u و v دارای مـــشتقات پیوســـته اســـت. بنابراین تابع $f(z) = \ln z$ مشتق پذیر می باشد.

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = e^{-i\theta}(\frac{\delta u}{\delta r} + i\frac{\delta v}{\delta r}) = e^{-i\theta}(\frac{1}{r}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

خواص تابع لگاریتم :

1) اگر $z \neq 0$ آنگاه $e^{\ln z} = z$.

2) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \ , \ (\mod 2\pi i)$

3) $\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln z_1 - \ln z_2 \ , \ (\mod 2\pi i)$

توابـــع مثلثـــاتی : بـــا توجـــه بـــه فرمـــول اولـــر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ داریـــم $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ در نتیجه

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

اگر z یک عدد مختلط باشد، آنگاه توابع $\sin z$ و $\cos z$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

قضیه : توابع مثلثاتی مختلط $\sin z$ و $\cos z$ تام می باشند و

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

اثبات :

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i}$$
$$= i\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos 2$$

تساویهای زیر به سادگی قابل اثبات است.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \quad , \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z$$
$$\sin(-z) = -\sin z \quad , \quad \cos(-z) = \cos z$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(2z) = 2\sin z \cos z \quad , \quad \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$
$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2n+1}{2}\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

توابع هذلولوی : توابع $\sinh(z)$ و $\cosh(z)$ به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

توابع مذکور همواره تام بوده و داریم

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$$

توابع نمایی مختلط : اگر $z \neq 0$ و c یک عدد مختلط باشد، آنگاه z^c را بصورت زیر تعریف می کنیم $z^c = e^{c \ln z}$

درنتیجه هر مقدار بخصوص $\ln z$ یک مقدار ویژه z^c را مشخص می کند.

مثال : مقادیر $(i)^{-2i}$ را پیدا کنید.

حل : $(i)^{-2i} = e^{-2i \ln i}$ **اما**

$\ln i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, $(Arg i = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\ln i = i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$

$-2i \ \ln i = -2i^2(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \pi + 4n\pi = \pi(1+4n)$

$\Rightarrow i^{-2i} = e^{-2i \ln i} = e^{\pi(1+4n)}$

بنابراین $(i)^{-2i}$ چند مقداری است.

مـــشتق پـــذیری تـــابع نمـــایی مخـــتلط : تـــابع نمـــایی مخـــتلط در دامنـــه هـــایی کـــه $\ln z$ تحلیلی است مشتق پذیر می باشد و

$$\frac{d}{dz}(z^c) = \frac{d}{dz}(e^{c\ln z}) = \frac{c}{z}e^{c\ln z} = \frac{c}{z}.z^c = cz^{c-1}$$

تذکر : از توابع نمایی مختلط برای پیدا کردن توابع معکوس مثلثاتی استفاده می شود.

مثال : توابع معکوس $z = \sin\omega$ را تعیین کنید.

حل :

$$\sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = z \Rightarrow e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2iz$$

$$e^{2i\omega} - 2ize^{i\omega} - 1 = 0 \Rightarrow e^{i\omega} = iz \pm\sqrt{1-z^2} \Rightarrow$$

$$e^{i\omega} = iz \pm\sqrt{1-z^2}$$

$$\ln e^{i\omega} = \ln\left[iz \pm\sqrt{1-z^2}\right] \Rightarrow i\omega = \ln\left[iz \pm\sqrt{1-z^2}\right]$$

$$\Rightarrow \omega = -i\ \ln\left[iz \pm\sqrt{1-z^2}\right]$$

تمرینات :

1- نشان دهید اگر $z_1 = i$ و $z_2 = i - 1$ آنگاه

$\ln z_1 z_2 + \ln z_1 + \ln z_2$

2- مقادیر زیر را در شاخه اصلی تعیین کنید.

$(1+i)^{1+i}$, i^{2i} , $4^{\frac{1}{2}}$

نگاشت

فرض کنید f یک تابع تحلیلی روی دامنه D از نقاط صفحه z بوده و $\omega = f(z)$.

تابع f را می توان یک تبدیل $z \to \omega$ در نظر گرفت، در نتیجه هر نقطه D با نقطه ای در صفحه ω و دامنه D با مجموعه D' در صفحه ω متناظر می شود. در این فصل خواص هندسی نگاشت f را بررسی می کنیم.

اگر u و v قسمت های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $\omega = f(z)$ باشند، آنگاه نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$ از صفحه z به وسیله f به نقطه (u_0, v_0) در صفحه ω منحنی های C_1 و C_2 متلاقی در نقطه z_0 به منحنی های C_1' و C_2' متلاقی در نقطه (u_0, v_0) مبدل می شوند. تبدیل $\omega = f(z)$ را یک نگاشت همدیس (Conformal mapping) در نقطه z_0 می نامند در صورتی که زاویه بین C_1 و C_2 در نقطه (x_0, y_0) با زاویه بین C_1' و C_2' در نقطه (u_0, v_0) برابر و هم جهت باشد.

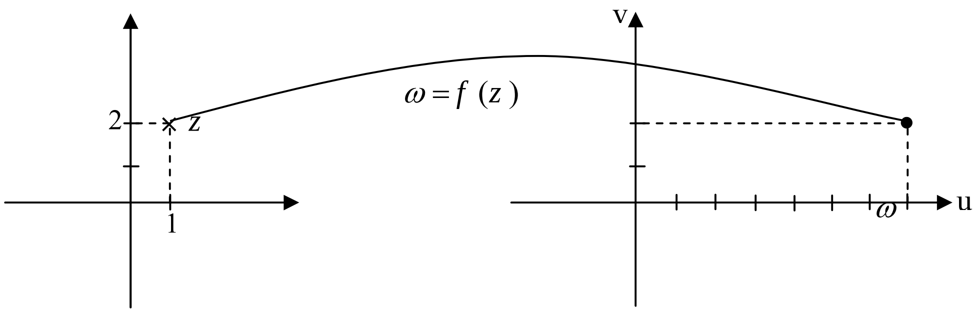
اینک با ذکر مثالهایی به بررسی انواعی از نگاشتهای مهم می پردازیم:

1- نگاشت خطی : اگر A و B اعداد ثابت مختلطی باشند حالت کلی نگاشت خطی به صورت $\omega = f(z) = Az + B$ می باشد.

مثال : تصویر نقطه $z = 1 + 2i$ را تحت تابع خطی $\omega = f(z) = (1-i)z + (i+4)$ را بیابید.

حل :

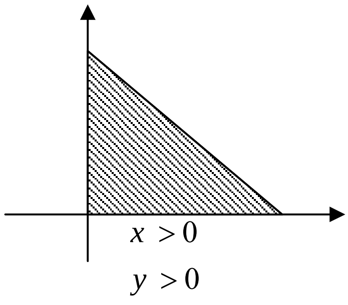
$f(z) = (1-i)(1+2i) + (i+4) = 7 + 2i$



مثال : تصویر ناحیه نشان داده شده را تحت تابع $\omega = f(z) = (1+i)z$ را بیابید.

حل : در دو دستگاه دکارتی و قطبی مسئله را بررسی می کنیم.

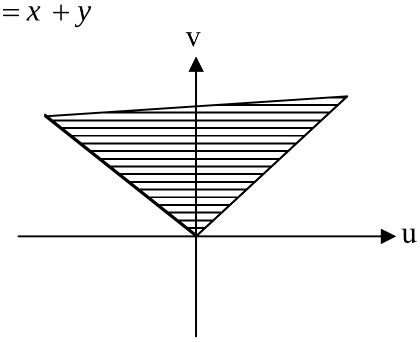
الف) مختصات دکارتی



$$\omega = (1+i)(x+iy) = x + iy + ix - y$$
$$= (x-y) + i(x+y)$$

$u = x - y$ اگر $x > 0$, $y > 0 \to u = ? \to v > 0$

$v = x + y$



$$2x = u + v \Rightarrow x = \frac{u+v}{2} > 0 \to v > -u,$$
$$2y = v - u \Rightarrow y = \frac{v-u}{2} > 0 \to v > u$$

ب) استفاده از مختصات قطبی : ناحیه مورد نظر عبارت از

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad 0 < r < \infty \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

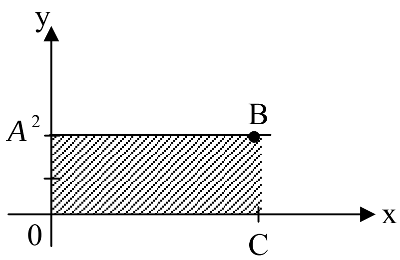
$$\omega = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.re^{i\theta} = r\sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = \rho e^{i\varphi}$$

داریم $\omega = f(z) = u + iv = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$, $\varphi = \tan^{-1}(\frac{v}{u})$

$$\rho = r\sqrt{2} \ , \ \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \ , \ r > 0 \ , \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \rho > 0 \ , \ 0 < \varphi - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$$

مثال : تصویر ناحیه نشان داده شده را تحت نگاشت $\omega = iz + 1$ را بیابید و آنرا نمایش دهید.

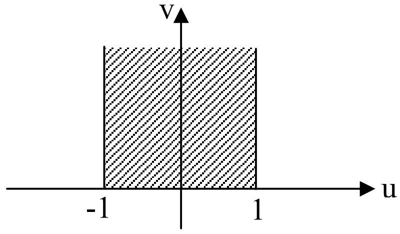


حل :

$$\omega = iz + 1 = i(x+iy) + 1 = (1-y) + ix$$

$$u = 1 - y$$

$v = x$



پاره خط OC $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x \geq 0 \Rightarrow v \geq 0 \end{cases}$

پاره خط AB $\begin{cases} y = 2 \Rightarrow u = 1 - 2 \Rightarrow u = -1 \\ x \geq 0 \Rightarrow v \geq 0 \end{cases}$

پاره خط OA $\begin{cases} x = 0 \rightarrow v = 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \Rightarrow -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$

بررسی نگاشت $\omega = f(z) = z^2$ **،**

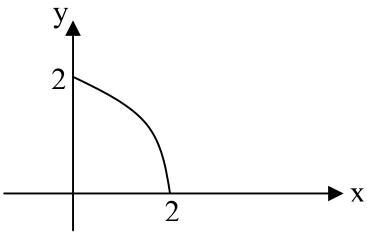
در سیستم دکارتی داریم:

$$z = x + iy \rightarrow \omega = f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

و در سیستم قطبی داریم:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \omega = f(z) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \rho = r^2 \\ \varphi = 2\theta \end{cases}$$

مثال : تصویر ناحیه نشان داده شده را تحت نگاشت $f(z) = z^2$ بیابید.



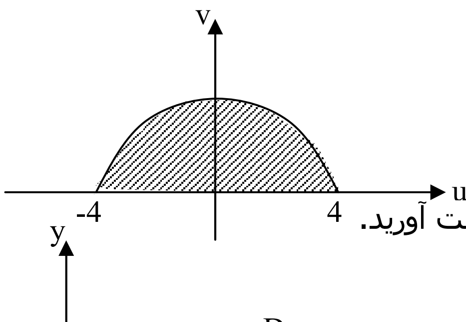
حل : در سیستم قطبی داریم:

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ 0 < r < 2, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

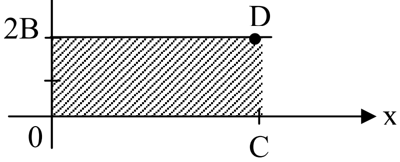
بنابراین تحت نگاشت $\omega = f(z) = z^2$ داریم:

$$\omega = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \rho < 4 \\ 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

و در نتیجه ناحیه زیر را خواهیم داشت.



مثال : تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $\omega = f(z) = z^2$ را بدست آورید.



حل : ناحیه داده شده عبارت است از

$$x > 0 \quad , \quad 0 < y < 2$$

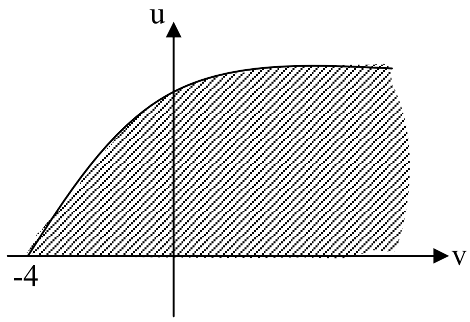
و نیز $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ بنابراین داریم:

OB پاره خط $\begin{cases} 0<y<2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=-y^2 \\ v=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -4<u<0 \\ v=0 \end{matrix}$

OC پاره خط $\begin{cases} y=0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=x^2 \\ v=0 \end{matrix} \Rightarrow u>0$

BD پاره خط $\begin{cases} y=2 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=x^2-4 \\ v=4x \end{matrix} \Rightarrow u=\frac{1}{16}v^2-4$

چون $x>0$ است پس $v>0$ می باشد. در نتیجه ناحیه مورد نظر تحت نگاشت z^2 به ناحیه زیر برده می شود.



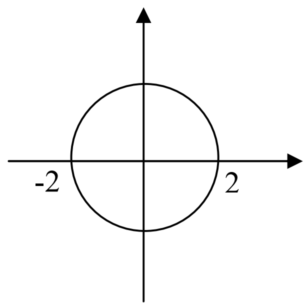
نگاشت $\omega=f(z)=\sqrt{z}$ ،

جهت بررسی این نگاشت در مختصات قطبی داریم:

$$z=re^{i\theta} \Rightarrow \omega=(re^{i\theta})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2})}=\rho e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \varphi=\frac{\theta}{2} \\ \rho=\sqrt{r} \end{cases}$$

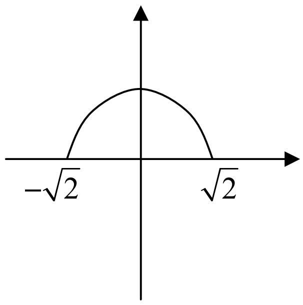
مثال : تصویر ناحیه زیر که دایره ای بشعاع دو است را تحت نگاشت $\omega=f(z)=\sqrt{z}$ بدست آوریم.

حل :



$$\omega=(2e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\theta}{2})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{2} \\ \varphi=\frac{\theta}{2} \end{cases} \qquad 0<\theta<2\pi \Rightarrow 0<\varphi<\pi$$



مثال : بررسی نگاشت $\omega = f(z) = \frac{1}{z}$

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

پس تحت مختصات دکارتی داریم:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

و تحت مختصات قطبی داریم:

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases}$$

مثـــال : تــصویر نقــاط روی منحنــی $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ را تحــت نگاشـــت $\frac{1}{z}$ بــه ازاء مقادیر مختلف a، b، c و d را بدست آورید.

حل : با قرار دادن مقادیر $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ و $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$ داریم:

$$a + bu - cv + d(u^2+v^2) = 0$$

بنابراین حالات زیر را درنظر می گیریم:

الف) اگر $a=0$ و $d \neq 0$ باشد، در این حالت خط به یک دایره تصویر می شود:

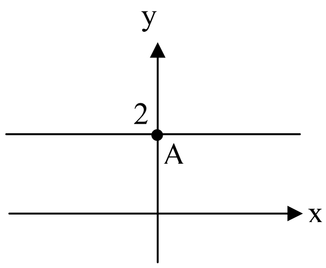
$$u^2+v^2+\frac{b}{d}u-\frac{c}{d}v \Rightarrow 0(u+\frac{b}{2d})^2+(v-\frac{c}{2d})^2 = K^2$$

ب) اگر $d=0$ و $a \neq 0$ دایره به خط تصویر می گردد.

ج) اگر $d=0$ و $a=0$، خط به یک خط تصویر می گردد.

مثال : تصویر خط $y=2$ را تحت نگاشت $\omega=f(z)=\frac{1}{z}$ را بیابید.

حل :

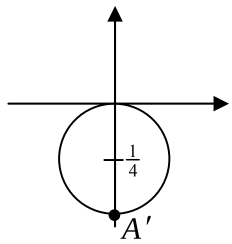


$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\quad,\quad \forall x$$

$$y=\frac{-v}{u^2+v^2}=2\Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{2}=0$$

$$u^2+(v+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$$

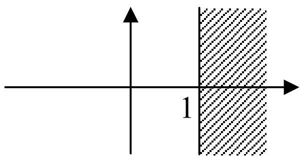
بعنوان مثال تصویر نقطه A که در آن $x=0$ و $y=2$ است، عبارت است از:



$$\omega=\frac{1}{z}=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$$

و یا با در نظر گرفتن $u=\frac{x}{x^2+y^2}=0$ و $v=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$ نقطه A به نقطه $A'(0,\frac{-1}{2})$ تصویر می شود.

مثال : تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $\omega=f(z)=\frac{1}{z}$ را بیابید.

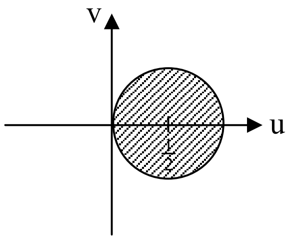


حل :

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\ge 1\Rightarrow u^2+v^2-u\le 0\Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2\le\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{-v}{u^2+v^2}\ ,\ \forall y\ ,\ v=\frac{-y}{x^2+y^2}\ \ \forall v\Rightarrow\begin{cases}y\ge 0\Rightarrow v<0\\ y<0\Rightarrow v>0\end{cases}$$

یعنی تمام نقاط داخل دایره تصویر ناحیه مورد نظر است.



بررسی نگاشت $\omega=f(z)=e^z$

اگر

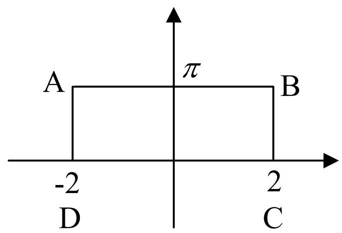
$$z=x+iy \Rightarrow \omega=f(z)=e^{z}=e^{x}.e^{iy} \Rightarrow \begin{cases}\rho=e^{x}\\ \varphi=y\end{cases}$$

یا از طریق مثلثاتی داریم:

$$\omega=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y \Rightarrow \begin{cases}u=e^{x}\cos y\\ v=e^{x}\sin y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan y=\dfrac{v}{u}\\ x=\dfrac{1}{2}\ln(u^{2}+v^{2})\end{cases}$$

مثال : مطلوبست محاسبه نگاشت ناحیه زیر تحت تابع $\omega=f(z)=e^{z}$ **.**

حل :



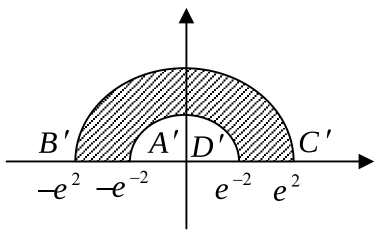
$$DC \text{ پاره خط } \Rightarrow \begin{cases}-2\le x\le 2\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=e^{x}\\ v=0\end{cases} \Rightarrow e^{-2}\le u\le e^{2}$$

$$AB \text{ پاره خط } \Rightarrow \begin{cases}-2\le x\le 2\\ y=\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=-e^{x}\\ v=0\end{cases} \Rightarrow -e^{2}\le u\le -e^{-2}$$

$$BC \text{ پاره خط } \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ 0<y<\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=e^{2}\cos y\\ v=e^{2}\sin y\end{cases} \Rightarrow u^{2}+v^{2}=e^{4}$$

$$AD \text{ پاره خط } \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ 0<y<\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=e^{-2}\cos y\\ v=e^{-2}\sin y\end{cases} \Rightarrow u^{2}+v^{2}=e^{-4}$$

پس ناحیه زیر را خواهیم داشت:



بررسی نگاشت $\omega=f(z)=\ln z$: این نگاشت عکس حالت قبل است

$$z=re^{i\theta} \Rightarrow \ln\omega=\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$$

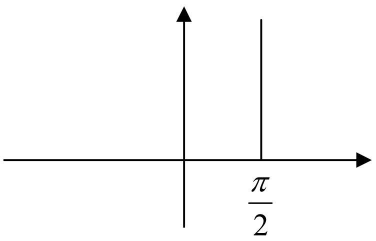
بررسی نگاشت $\omega=f(z)=\sin z$

$$s\omega=f(z)=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

بنابراین

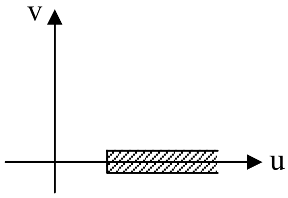
$$v = \cos x \sinh y \quad , \quad u = \sin x \cosh y$$

مثال : تصویر خط زیر را تحت نگاشت $\omega = f(z) = \sin z$ بیابید.

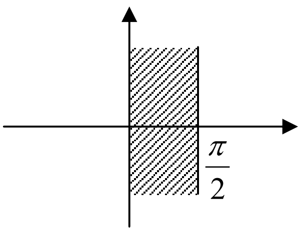


حل :

$$\begin{matrix} y \geq 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u = \cosh y \\ v = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u > 1 \\ v = 0 \end{matrix}$$



حالت دوم: اگر خط موازی محور yها به زیر محور yها هم ادامه داشت، داریم:



حل:

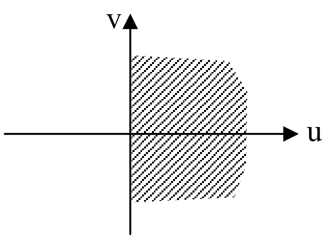
$$\begin{matrix} x = 0 \\ -\infty < y < +\infty \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \sinh y \ , \ -\infty < u < +\infty \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u = \mathrm{Sin}\ u\ \mathrm{Cosh} y \qquad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \circ \leq \mathrm{Sin}\, x \leq 1 & \Rightarrow U \geq 0 \\ 0 \leq \mathrm{Cos}\, x \leq 1 & \Rightarrow -\infty < v < +\infty \end{matrix}$$

$$v = \mathrm{Cos} x\, \mathrm{Sin} h y$$

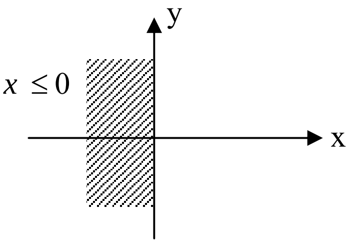
پس به ناحیه زیر برده مي شود.



نگاشتهاي متوالي: در اين حالت نگاشت داده شده را بصورت تركيبي از چند تابع مختلف مورد بررسي قرار مي گيرد.

مثال: مطلوبست محاسبه و رسم تصوير ناحيه نشان داده شده زير تحت نگاشت

$$W = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$



حل:

$$W = \frac{Z-1}{Z+1} \Rightarrow Z(W-1) = 1-W \Rightarrow Z = \frac{1+W}{1-W}$$

$$Z = \frac{1+U+iV}{1-U-iV} + \frac{(1-U+iV)}{(1-U+iV)} = \frac{(1-U^2-V^2)}{(1-U)^2+V^2}$$

بنابراين:

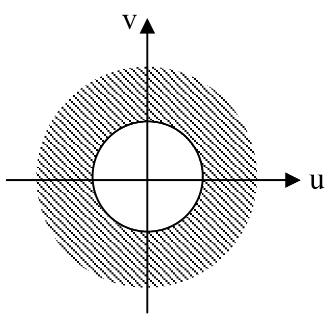
$$x = \frac{1-U^2-V^2}{(1-U)^2+V^2}$$

$$y = \frac{2V}{(1-U)^2+V^2}$$

$$x \le 0 \Rightarrow (1-U^2-V^2) \le 0 \Rightarrow U^2+V^2 \ge 1$$

بر روی U محدودیتی وجود ندارد $-\infty < y < \infty \Rightarrow$

و در نتیجه به ناحیه زیر برده می‌شود.

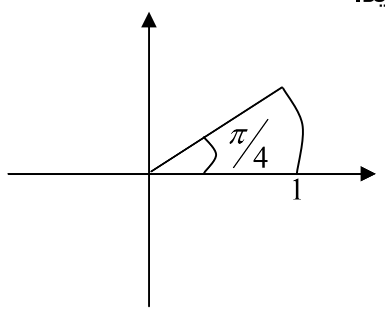


تمرینات:

1ـ تصویر نیم صفحه بالایی تحت نگاشت $W = f(z) = \frac{Z+i}{Z-1}$ را بدست آوریم.

2ـ اگر R ناحیه‌ای در نیم صفحه بالایی به صورت $\left|Z - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ باشد، تصویر آنرا تحت نگاشت $WZ - Z(1-i) + i = 0$ را بدست آورید.

3ـ تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $W = f(z) = Z^4$ بدست آورید.



4ـ تصویر خط $y = -1$ را با نگاشت $W = f(z) = (1+i)Z - 2$ بدست آورید.

5ـ تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $W = f(z) = e^z$ را بیابید و رسم کنید.

الف) $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-1 < x < 1$

ب) $0 < y < 1$, $0 < x < 2$

ج) $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $-3 < x < -2$

د) $0 \le y \le \pi$, $x \ge 0$

6ـ تصویر ناحیه $y>1$ را با نگاشت $W = (1-i)Z$ بیابید.

7ـ نشان دهید که تبدیل $W = f(z) = iz + i$ نیم صفحه $x>0$ را به روی نیم صفحه $V>1$ می‌نگارد.

8ـ نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را تحت نگاشت $W = f(z) = \frac{1}{2}$ بدست آورید.

9ـ نقش نواحی زیر را تحت نگاشت $W = f(z) = Z^2$ بیابید.

الف) $|Z| > 2$ ب) $0 \le y \le 1$

10ـ نقش نواحی زیر را تحت نگاشت را بیابید.

الف) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 2$ ب) $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$

انتگرال معین:

اگر $F(t)=U(t)+iV(t)$ یک تابع مختلط باشد، انتگرال معین F را روی [a,b] را به نماد $\int_a^b F(t)dt$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b F(t)dt=\int_a^b U(t)dt+i\int_a^b V(t)dt \qquad (1)$$

منحنی‌ها: منحنی یک کمان C مجموعه نقاط $Z=(x,y)$ در صفحه مختلط است بقسمی که

$x=x(t) \quad , \quad y=y(t) \quad , \quad a\le t\le b$

هرگاه $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای از پارامتر حقیقی t باشد، بنابراین منحنی C نگاشت پیوسته $Z:[a,b]\to C$ که بصورت:

$$Z=z(t)=x(t)+iy(t) \qquad a\le t\le b \qquad (2)$$

تعریف می‌شود. هرگاه کمان C خود را قطع نکند، کمان ساده یا کمان جردن می‌نامند بنابراین C ساده است اگر:

$\forall t_1\ ,\ t_2\in[a,b] \quad , \quad t_1\ne t_2\Rightarrow z(t_1)\ne z(t_2)$

از سوی دیگر اگر C ساده باشد بطوری که $Z(a)=Z(b)$ آنگاه C را ساده بسته می‌نامند.

تعریف: کمان C که بوسیله معادله پارامتری (2) تعریف شده است را یک کمان هموار می‌نامند هرگاه $Z'(t)$ موجود، پیوسته و مخالف صفر در فاصله [a,b] باشد که در آن:

$$Z'(t)=x'(t)+iy'(t) \qquad a\le t\le b \qquad (3)$$

انتگرال روی منحنی:

اگر C یک مرز و تابع f بر روی C تعریف شده باشد آنگاه انتگرال بر روی C را با نماد $\int_C f(z)dz$ نمایش داده شده و در صورتی که $Z=z(t)$ معادله منحنی C در فاصله [a,b] باشد، چنین تعریف می‌شود:

$$\int_C f(Z)dz=\int_a^b f\big(Z(t)\big)Z'(t)dt \qquad (4)$$

مثال 1: مقدار انتگرال $\int_C |z|\,dz$ وقتی که C مرزي با معادله

$Z(t)=t+it \qquad 0\le t\le 1$

باشد را بیابید.

حل:

$Z'(t)=1+i \quad , \quad f\big(Z(t)\big)=|t+it|=\sqrt{2}t$

بنابراين:

$$\int_0^1 f(z)dz = \int_0^1 \sqrt{2}t(1+i)dt = \sqrt{2}(1+i)\int_0^1 tdt$$
$$= \sqrt{2}(1+i)\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

خواص انتگرال روي منحني:

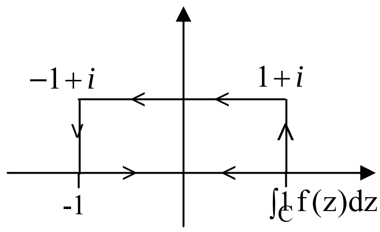
1ـ اگر منحني C در فاصله $[a,b]$ به دو منحني C_1 , C_2 به ترتيب در فاصله هاي $[a,c]$ و $[c,b]$ تقسيم شده باشد، آنگاه:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

و بطور كلي اگر C از منحني هاي $C_1, C_2, ..., C_n$ تشكيل شده باشد داريم:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$$

مثال 2: مقدار انتگرال $\int_C |z| dz$ در صورتي كه C مرز مستطيلي با رئوس 1ـ و 1 و $1+i$ و $-1+i$ مي‌بشد را محاسبه كنيد.



حل: ملاحظه مي شود كه $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_4} f(z)dz$

$C_1 = Z(t) = t \qquad -1 \le t \le 1 \qquad\qquad C_3 = Z(t) = -t+i \qquad -1 \le t \le 1$
$C_2 = Z(t) = 1+it \qquad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad C_4 = Z(t) = -1-it \qquad -1 \le t \le 0$

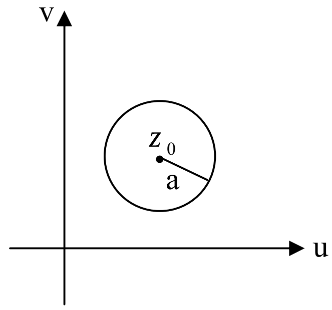
$$C_1 : Z'(t) = 1 \quad , \quad f(z(t)) = |z(t)| = |t|$$
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-1}^1 f(z(t))Z'(t)dt = \int_{-1}^1 |t| dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1$$
$$C_2 : Z'(t) = 1 \quad , \quad f(z(t)) = |z(t)| = \sqrt{1+t^2}$$
$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 i\sqrt{1+t^2}dt = i\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$
$$C_3 : Z'(t) = -1 \quad , \quad f(z(t)) = |z(t)| = \sqrt{1+t^2}$$
$$\int_{C_3} f(z)dz = -1\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt = -2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$
$$C_4 : Z'(t) = -i \quad , \quad f(z(t)) = |z(t)| = \sqrt{1+t^2}$$
$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{-1}^0 -i\sqrt{1+t^2}dt = -i\int_{-1}^0 \sqrt{1+t^2}dt$$
$$= -i\int_0^{-1} \sqrt{1+t^2}dt = i\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$

بنابراین:

$$\int_C f(z)dz = 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = 1-\sqrt{2}-L_n(1+\sqrt{2})$$

مثال 2: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر روی منحنی C دایره‌ای بشعاع a و به مرکز Z_0

$$I=\int_C (Z-Z_0)^n dz \quad , \quad f(z)=(Z-Z_0)^n \ , \ n\in z$$



حل: منحنی دارای نمایش پارامتری زیر است:

$$C: Z-Z_0 = ae^{it} \qquad 0<t<2\pi$$

$$C: Z(t) = Z_0 + ae^{it} \qquad \Rightarrow Z'(t) = iae^{it}$$

$$|Z-Z_0| = a \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = a$$

$$\int_0^{2\pi} \left(ae^{it}\right)^n \left(iae^{it}\right)dt = a^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}et$$

$$= \frac{ia^{n+1}}{i(n+1)} e^{it(n+1)}\Big]_0^{2\pi} = \frac{ia^{n+1}}{i(n+1)}\left[e^{i2\pi(n+1)}-1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & n\neq -1 \\ 2\pi i & n=-1 \end{cases}$$

قضیه کوشی: اساسی‌ترین قضیه در انتگرالگیری توابع مختلط قضیه کوشی می‌باشد که عبارت است از:

اگر تابع f روی کلیه نقاط مرز بسته C و در نقاط داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\int_C f(Z)dz = 0$$

این قضیه به قضیه کوشی ـ گورسا مشهور است.

بنابراین در مثال قبل اگر $f(z)=\text{Cos}\,z$ باشد آنگاه $\int_C \text{Cos}\,z\,dz = 0$ است زیرا این تابع همواره تحلیلی است.

تمرینات:

1ـ اگر C مرزی به معادله زیر باشد مقدار $\int_C Z^2 dz$ را بیابید.

$$Z(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 2 \\ 2+i(t-2) & 2<t\le 3 \end{cases}$$

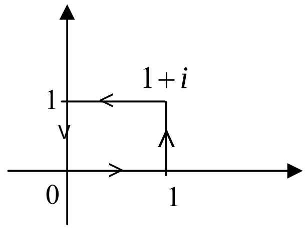
2ـ اگر C دایره $Z=3e^{i\theta}$ و $0\le\theta\le\pi$ باشد، حاصل $\int_C Z^{\frac{1}{2}} dz$ را بیابید.

3ـ اگر C کمانی از $Z=-1-i$ تا $Z=1+i$ در طول منحنی $y=x^3$ و

$$f(y)=\begin{cases} 4y & y>0 \\ 1 & y<0 \end{cases}$$

مقدار انتگرال $\int_C f(z)dz$ را بیابید.

4ـ مقدار انتگرال $\int_C \overline{Z}^2 dz$ را در صورتي که C مرز مستطيلي با رئوس 0 و 1 و 1+i و i باشد را محاسبه کنید.



قطب ها و مانده ها

تعریف: اگر تابع f(z) را بتوان به صورت زیر بسط داد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (Z-Z_0)^n + \frac{b_1}{Z-Z_0} + \frac{b_2}{(Z-Z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(Z-Z_0)^n}$$

آنگاه Z_0 را قطب مرتبه nام تابع f(z) مي گوئیم.

اگر $n=1$ باشد، آنگاه Z_0 را قطب ساده مي گوئیم.

اگر $Z=Z_0$ یک قطب ساده تابع f(z) باشد، آنگاه مانده تابع در این قطب برابر است با:

$$\gamma_1 = b_1 = \lim_{Z\to Z_0} (Z-Z_0) f(z)$$

اثبات: طبق فرض Z_0 یک قطب ساده است بنابراین:

$$f(z)=\frac{b_1}{(Z-Z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (Z-Z_0)^n$$

$$\lim_{Z\to Z_0} (Z-Z_0) f(z) = \lim_{Z\to Z_0}\left[b_1 + (Z-Z_0)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (Z-Z_0)^n \right] = b_1$$

مثال: كليه صفرها و قطب هاي تابع زير را بدست آ ورده و مانده هاي تابع را در قطب هاي مربوطه بدست آ وريد.

$$f(Z)=\frac{Z^2+1}{Z(Z^2-1)(Z+2)}$$

حل: ريشه هاي صورت صفرهاي تابع و ريشه هاي مخرج قطب هاي آن مي باشد.

$$f(Z)=0 \Rightarrow Z^2+1=0 \Rightarrow Z=\pm i$$

صفرهاي تابع $=\{i\ ,-i\}$

$$Z\,(Z^2-1)(Z+2)=0 \quad \Rightarrow \quad Z=\pm 1 \quad . \quad Z=-2\ ,\ z=0$$

بنابراين قطب هاي تابع عبارتند از:

$$\{-1,0,1,-2\}$$

براي تعيين مانده هاي مربوط به هر كدام از قطب ها به صورت زير عمل مي كنيم:

$$\gamma_1(Z=0)=\lim_{z\to 0} Zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{Z^2+1}{(Z^2-1)(Z+2)}=\frac{-1}{2}$$

$$\gamma_2(Z=1)=\lim_{z\to 1}(Z-1)f(z)=\frac{1}{3}$$

$$\gamma_3(Z=-1)=\lim_{z\to -1}(Z+1)f(z)=-1$$

$$\gamma_4(Z=-2)=\lim_{z\to -2}(Z+2)f(z)=\frac{-5}{6}$$

قضيه: اگر $f(z)=\frac{P(z)}{q(z)}$ كه در آن P و q در Z_0 تحليلي و $q(Z_0)$ در Z_0 يك ريشه ساده داشته باشد بطوريكه $P(Z_0)\neq 0$ آنگاه Z_0 يك قطب ساده f(z) بوده و مانده مربوط به آن از رابطه زير بدست مي آيد:

$$b_1=\gamma(Z=Z_0)=\frac{P(Z_0)}{q'(Z_0)}$$

اثبات:

$$b_1=\gamma(Z=Z_0)=\lim_{z\to z_0}(Z-Z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}(Z-Z_0)\frac{P(Z)}{q(Z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{P(Z)}{\frac{q(Z)-q(Z_0)}{Z-Z_0}}$$

$$=\frac{\lim_{z\to z_0}P(Z)}{\lim_{z\to z_0}\frac{q(Z)-q(Z_0)}{Z-Z_0}}=\frac{P(Z_0)}{q'(Z_0)}$$

مثال 2: کلیه قطب‌ها و صفرهای تابع زیر را بدست آورده و مانده مربوط به هر کدام از قطب‌ها را بیابید.

$$f(z) = \mathrm{Cot}(\pi Z) = \frac{\mathrm{Cos}(\pi Z)}{\mathrm{Sin}(\pi Z)}$$

حل: صفرهای تابع عبارتند از:

$$f(z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Cos}(\pi Z) = 0 \Rightarrow \pi Z = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow Z = \frac{2K+1}{2}\ ,\quad K \in Z$$

قطب‌های تابع نیز عبارتند از:

$$Sin(\pi z) = 0 \ \Rightarrow \pi z = k\pi$$
$$\Rightarrow Z = k \quad , \quad k \in Z$$

مانده تابع در هر قطب را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\gamma_k(Z = K) = \frac{Cos(\pi Z)}{(Sin \quad \pi Z)'}\bigg|_{Z=K} = \frac{Cos(\pi k)}{\pi Cos(\pi k)} = \frac{1}{\pi}$$

بنابراین مانده در تمامی قطب‌ها $\frac{1}{\pi}$ می‌باشد.

قضیه 2: اگر $f(z)$ در $Z = Z_0$ داراي قطب nام باشد، آنگاه مانده در این قطب برابر است با:

$$\gamma(Z = Z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{Z\to Z_0}\left[(Z-Z_0)^n f(Z)\right]^{(n-1)}$$

منظور از توان $(n-1)$ مشتق مرتبه $(n-1)$ عبارت داخل کروشه می‌باشد.

مثال: مطلوبست محاسبه صفرها و قطب‌های تابع $f(z)$ و همچنین مانده‌های مربوط به هر کدام از قطب‌ها را بیابید.

$$f(z) = \frac{\mathrm{Cos}\, z}{z^2 (Z-\pi)^3}$$

حل: صفرهای تابع عبارتند از:

$$f(z) = \mathrm{Cos}\, Z = 0 \Rightarrow Z = (2K+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ K \in Z$$

قطب‌های تابع نیز عبارتند از:

سه بار $Z = \pi$ و دو بار $Z = 0$ $Z^2 (Z-\pi)^3 = 0 \Rightarrow$

پس $Z = 0$ قطب مرتبه دوم و $Z = \pi$ قطب مرتبه سوم است. مانده‌های مربوط به این قطب‌ها نیز عبارتند از:

$$\gamma(Z=0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{Z\to 0}\left[Z^2 f(z)\right]'$$

$$=\lim_{Z\to 0}\left[\frac{\cos z}{(Z-\pi)^3}\right]'=\frac{-3}{\pi^4}$$

مانده مربوط به $Z=\pi$ نیز عبارت است از:

$$\gamma(Z=\pi)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{Z\to\pi}\left[\frac{\cos z}{Z^2}\right]''$$

$$=-\frac{6+\pi^3}{2\pi^4}$$

قضیه كوشي: فرض کنید C مرز ساده بسته‌ای باشد که تابع $f(z)$ روی C و در کلیه نقاط داخلی آن مگر در $Z_1,Z_2,\dots,Z_n$ تحلیلی باشد، اگر $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ مانده‌های تابع در این نقاط باشند، آنگاه:

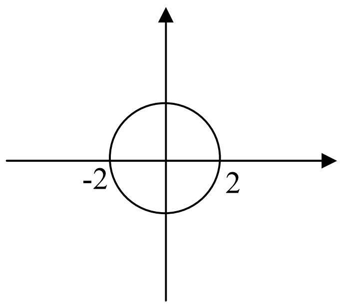
$$\int_C f(z)dz=2\pi i(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n)$$

مثال: اگر C دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع 2 باشد یعنی:

$$C:|Z|=2$$

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_C \frac{e^z}{Z(Z+1)}dz$$



حل: قطب هاي تابع عبارتند از:

$$Z(Z+1)=0 \Rightarrow Z_1=0 \ . \ Z_2=-1$$

که چون هر دو قطب ساده هستند، پس با استفاده از قضیه (1) داریم:

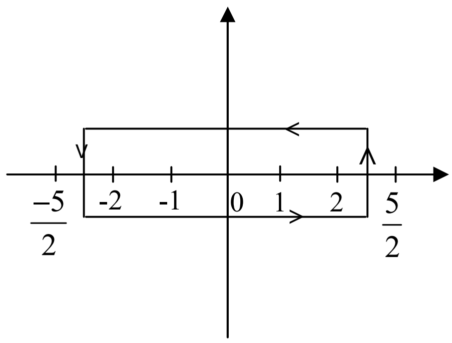
$$\gamma_1=\lim_{Z\to 0} Z \quad f(z)=\lim_{Z\to 0}\frac{e^z}{Z+1}=1$$

$$\gamma_2=\lim_{Z\to -1}(Z+1) \quad f(z)=\lim_{Z\to -1}\frac{e^z}{2Z+1}=\frac{e^{-1}}{-1}=\frac{-1}{e}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_C \frac{e^z}{Z(Z+1)}dz=2\pi i(1-\frac{1}{e})$$

مثال: اگر C مسیر زیر باشد، حاصل $\int_C \text{Cot}(\pi z)dz$ را بیابید.



حل: قطب‌های تابع عبارتند از:

$$\text{Sin}(\pi z)=0 \Rightarrow \pi z = k\pi \Rightarrow Z=K \;,\quad K\in Z$$

پس قطب‌های تابع عبارتند از:

$$Z_1=0\;,\; Z_2=1\;,\; Z_3=-1\;,\; Z_4=2\;,\; Z_5=-2$$

بنابراین:

$$\int_C \text{Cot}\,(\pi z)dz = 2\pi i(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_5)$$

که در آن:

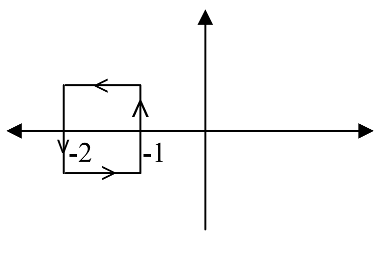
$$\gamma_k = \left.\frac{\text{Cos}(\pi z)}{\pi\,\text{Cos}(\pi z)}\right|_{z=k} = \frac{1}{\pi}$$

در نتیجه:

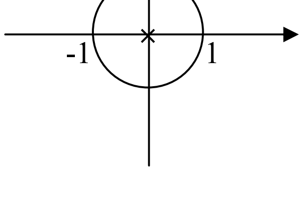
$$\int_C \text{Cot}(\pi z)dz = 2\pi i\left(\frac{5}{\pi}\right) = 10i$$

مثال: حاصل $\int_C \frac{\text{Cos}\, z}{Z^2(Z-\pi)^3}dz$ را بر روی هر کدام از مسیرهای زیر بیابید.

الف) اگر C عبارت باشد از:



ب) $C:|Z|=1$ یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک



حل: الف) چون بر روي مسير داده شده و نقاط داخل آن تحليلي است، چون تابع شما در نقاط $Z=0$ و $Z=\pi$ تحليلي نيست كه هيچكدام در مسير داده شده نمي باشد، پس طبق قضيه كوشي ـ گورسا حاصل انتگرال صفر است.

ب) تنها نقطه $Z=0$ در مسير داده شده است، پس

$$\int_C \frac{\text{Cos } z}{Z^2(Z-\pi)^3} = 2\pi i(\gamma_1)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{-3}{\pi^4}\right) = \frac{-6i}{\pi^3}$$

محاسبه انتگرال‌های مثلثاتی بر بازه $[0, 2\pi]$

انتگرال‌های مثلثاتی به صورت $\int_0^{2\pi} F(\text{Cos}\,\theta, \text{Sin}\theta)d\theta$ می‌باشند که در آن F تابع گویا فرض می‌شود. برای محاسبه آنها از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$Z = e^{i\theta} \Rightarrow \text{Cos}\quad \theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{Z+Z^{-1}}{2}$$
$$\text{Sin}\quad \theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{Z-Z^{-1}}{2i} \qquad (4)$$
$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

که در آن $0<\theta<2\pi$ و یا بعبارت دیگر $|Z|=1$ یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را داریم. به این ترتیب:

$$\int_0^{2\pi} F(\text{Cos}\,\theta, \text{Sin}\theta)d\theta = \int_C \frac{F(z)}{iz}dz$$

و انتگرال اخیر را با استفاده از قضیه کوشی یعنی نظریه مانده‌های مانده‌ها محاسبه می‌نمائیم.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin}^2\theta}{5+4\text{Cos}\,\theta}d\theta$$

حل: با استفاده از تغییر متغیر (4) داریم:

$$Z = e^{i\theta} \Rightarrow \text{Sin}\theta = \frac{Z-Z^{-1}}{2i}, \text{Cos}\theta = \frac{Z+Z^{-1}}{2}, d\theta = \frac{dz}{iz}$$

پس اگر $C:|Z|=1$ باشد،

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_C\frac{\left(\frac{Z-Z^{-1}}{2i}\right)^2}{5+4\left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{i}{4}\int_C\frac{(Z^2-1)^2}{Z^2(2Z^2+5Z+2)}dz=\frac{i}{4}\times 2\pi i(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)$$

اما قطب هاي تابع عبارت است از:

$Z^2=0\Rightarrow Z=0$ دو بار

$2Z^2+5Z+2=0\Rightarrow Z_2=-2$ غيرقابل قبول

$Z_3=\frac{-1}{2}$

پس تنها دو قطب $Z_1=0$ و $Z_3=\frac{-1}{2}$ در ناحيه C كه دايره اي بشعاع واحد و به مركز مبدأ مختصات است قرار دارد. اما مانده هاي مربوط به اين قطب ها عبارتند از: $Z_1=0$ قطب مرتبه دوم است پس:

$$\gamma_1(Z=0)=\lim_{Z\to 0}[zf(z)]'=\lim_{Z\to 0}\left[\frac{(z^2-1)^2}{(2z^2+5z+2)}\right]'=\frac{-5}{4}$$

$Z_3=\frac{-1}{2}$ قطب ساده است، بنابراين:

$$\gamma_2(Z=\frac{-1}{2})=\left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{Z=\frac{-1}{2}}=\frac{3}{4}$$

بنابراين حاصل انتگرال برابر است با:

$$=\frac{i}{4}\times 2\pi i\,(\gamma_1+\gamma_2)=\frac{-\pi}{2}\left(\frac{-5}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

مثال: حاصل انتگرال زير را بيابيد.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x}$$

حل: براي اينكه بتوانيم از توابع مختلط براي محاسبه انتگرال استفاده كنيم، بايستي حدود انتگرال به بازه تبديل شود. براي اين منظور از يك سري تغيير متغير استفاده مي كنيم.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x}$$

$$\theta=2\pi-x\to x=2\pi-\theta\ ,\quad dx=-d\theta\ ,\ \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$$

پس:

$$I=\int_{2\pi}^{\pi}\frac{-d\theta}{2-\cos\theta}=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

در نتیجه:

$$2I=\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

بنابراین:

$$I=\frac{1}{2}\int_C\frac{1}{2-\frac{Z+Z^{-1}}{2}}\times\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_C\frac{dz}{-Z^2+4Z-1}$$

زیرا قطب هاي تابع $Z_1=2-\sqrt{3}$ و $Z_2=2+\sqrt{3}$ که تنها Z_1 در ناحیه موردنظر است زیرا C دایره اي به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد است، پس:

$$\gamma_1=\frac{P(z)}{q'(z)}=\frac{1}{-2z+4}\bigg|_{z=2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow I=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

تعمیم قضیه فرمول انتگرال کوشی: اگر تابع $f(z)$ روی مرز بسته C و در ناحیه داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه برای هر Z_0 در ناحیه آن داریم:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(Z-Z_0)^2}$$

همچنین در حالت کلی:

$$f^{(n)}(Z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(Z-Z_0)^{n+1}}\qquad n=0,1,2,\dots$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_C\frac{e^{i\pi z}}{(Z+1)^3}dz\qquad C:|Z|=2$$

حل:

$$f(z)=e^{i\pi z}\Rightarrow f'(z)=i\pi e^{i\pi z}\Rightarrow f''(z)=(i\pi)^2e^{i\pi z}$$
$$f''(Z=-1)=-\pi^2e^{-i\pi}=\pi^2$$

بنابراین با استفاده از تعمیم انگرال کوشی داریم:

$$\int_C\frac{e^{i\pi z}}{(Z+1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(Z_0)=i\pi f''(Z=-1)=i\pi^3$$

تمرینات:

1ـ مقدار انتگرال $\int_C \frac{\cos z}{z^2(z-1)}dz$ را در حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $C:|Z+1|=\frac{1}{2}$

ب) $C:|Z|=\frac{3}{2}$

ج) $C:|Z-1|=\frac{1}{2}$

2ـ مقدار انتگرال هاي زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{Z^3-32+1}{(Z-i)^2}dz \quad , \quad C:|Z|=2$

ب) $\int_C \frac{1}{Z^4-1}dz \quad , \quad C:|Z|=3$

ج) $\int_C \frac{\cos z}{Z^7}dz \quad , \quad C:|Z-1|=2$

3ـ اگر C دایره $|Z|=2$ باشد، انتگرالهاي زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{dz}{Z^2-1}$ ب) $\int_C \frac{dz}{Z^2+Z+1}$

ج) $\int_C \frac{dz}{Z^2-8}$ د) $\int_C \frac{dz}{Z^2+2Z-3}$

4ـ اگر C دایره $|Z|=2$ باشد، انتگرال $\int_C \frac{dz}{Z^2(Z^2+16)}$ را محاسبه کنید.

5ـ انتگرالهاي زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C e^{\frac{1}{z}}\sin(\frac{1}{z})dz \quad , \quad C:|Z|=1$

ب) $\int_C \frac{\sin z}{Z^2-4}dz \quad , \quad C:|Z|=5$

ج) $\int_C \frac{1-2Z}{Z(Z-1)(Z-3)}dz \quad , \quad C:|Z|=2$

6ـ با استفاده از توابع مختلط نشان دهید که:

الف) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=2\pi$

ب) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}$

ج) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{a\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad (a>b>0)$

د) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{a\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$

7ـ حاصل انتگرال زیر را بیابید.

الف) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$

ب) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$

ج) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{1+\frac{1}{2}\cos\theta} d\theta = 4\pi(2-\sqrt{3})$

د) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1+\frac{1}{2}\cos\theta)^2} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$

هـ) $\int_0^{\pi} \frac{a\,d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+z}}$

محاسبه انتگرالهای غیر عادی بصورت $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **:**

در این بخش انتگرالهای حقیقی قابل حل به وسیله روش‌هایی از آنالیز مختلط، بررسی می‌شوند که ساده‌ترین آنها با قضیه زیر قابل حل هستند.

قضیه 3: فرض کنید $f(z)$ بر روی تمام اعداد مختلط بجز تعداد متناهی قطب غیر حقیقی تحلیلی باشد و عدد ثابت M و عدد R به قسمی وجود داشته باشند که:

$$|f(z)| \le \frac{M}{|Z|^2} \quad , \quad \forall\, |Z| > R$$

آنگاه:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum$ {مانده‌های f در قطب‌های نیم صفحه بالا}

$= -2\pi i \sum$ {مانده‌های f در قطب‌های نیم صفحه پایین}

مثال: مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ را محاسبه کنید.

حل: قرار می‌دهیم $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$، پس قطب‌های آن $Z=\pm i$ هستند اما تنها $Z=i$ در نیم صفحه بالایی است. بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i(\gamma_1)$$

که در آن:

$$\gamma_1=\lim_{Z\to i}(Z-i)f(z)=\lim_{Z\to i}(Z-i)\frac{1}{(Z-i)(Z+i)}=\frac{1}{2i}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)=\pi$$

مثال: نشان دهید که $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

حل: از انجا که $\frac{1}{1+x^4}$ تابع زوجي است، بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

با قرار دادن $f(z)-\frac{1}{1+z^4}$، قطب‌های آن عبارت است از:

$$Z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}\quad,\quad Z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}\quad,\quad Z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}\quad,\quad Z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

که فقط دو ریشه Z_1 , Z_2 دو قطب بالاي محور حقيقي است. با محاسبه مانده ها داریم:

$$\gamma_1=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\left(Z+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\frac{1}{1+Z^4}=\frac{1}{4Z^3}=\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}$$

$$\gamma_2=\lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}}\left(Z-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\frac{1}{Z^4+1}=\frac{1}{4Z^3}=\frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

بنابراین:

$$\int_C\frac{dz}{Z^4+1}=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)}\right)$$

و در نتيجه:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

محاسبه انتگرالهايي به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Cos}(ax)f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sin}(ax)f(x)dx$ **:**

براي محاسبه اينگونه انتگرال ها از قضيه زير استفاده مي کنيم.

قضيه 1: فرض کنيد $f(z)$ بر روي تمام اعداد مختلط بجز تعداد متناهي قطب غير حقيقي، تحليلي باشد و اعداد مثبت M و R موجود باشد بقسمي که:

$$|f(z)| \le \frac{M}{|Z|} \qquad \forall\, |Z| \ge R$$

آنگاه براي هر $a>0$ انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$ موجود است.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum$ {مانده هاي $f(z)e^{iaz}$ در نيم صفحه بالايي}

فرمول (1) برقرار است اگر $f = \frac{P}{Q}$ در صورتي که P و Q چند جمله اي بوده و Q فاقد ريشه حقيقي و $\deg Q \ge 1 + \deg P$

بعلاوه اگر f تابعي با مقادير حقيقي روي محور حقيقي باشد، آنگاه:

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Cos}\, ax\, f(x)dx = R_e[2\pi i \sum$ {مانده هاي $f(z)e^{iaz}$ در نيم صفحه بالايي}

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sin}\, ax\, f(x)dx = I_m[2\pi i \sum$ {مانده هاي $f(z)e^{iaz}$ در نيم صفحه بالايي}

مثال: نشان دهيد که $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Cos}\, x}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}$ که در آن $b>0$ است.

حل: تابع $\frac{Cosx}{x^2+b^2}$ زوج است، پس:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Cos}\, x}{x^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Cos}\, x}{x^2+b^2} dx$$

مانده $\frac{e^{iz}}{Z^2+b^2}$ را در نیم صفحه بالایی که فقط دارای قطب ساده ib می‌باشد عبارت است از:

$$\gamma_1 = \lim_{z \to ib} (Z-ib) \frac{e^{iz}}{(Z+ib)(Z-ib)} = \frac{e^{-b}}{2ib}$$

بنابراین:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Cos}x}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi e^{-b}}{2b}$$

مثال 2: نشان دهید که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Sin}2x}{x^2+2x+2}dx=\frac{-\pi}{e^2}\operatorname{Sin}2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Cos}2x}{x^2+2x+2}dx=\frac{-\pi}{e^2}\operatorname{Cos}2$$

حل: تابع $f(z)=\dfrac{1}{Z^2+2Z+2}$ را درنظر مي گيريم. قطب هاي آن عبارت است از:

$$Z^2+2Z+2=0\Rightarrow Z=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm i$$

پس $Z_1=-1+i$ و $Z_2=-1-i$ قطب‌های تابع f هستند و تنها Z_1 در بالای محور حقیقی است و تابع f دارای شرایط قضیه (1) است، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2iz}\frac{dz}{Z^2+2Z+2}=2\pi i\gamma_1$$

که در آن γ_1 مانده تابع $e^{2iz}f(z)$ در نقطه Z_1 است، بنابراین:

$$\gamma_1=\lim_{z\to-1+i}(Z+1-i)\frac{e^{2iz}}{(Z+1-i)(Z+1+i)}=\frac{e^{2i(-1+i)}}{-1+i+1+i}=\frac{e^{-2i-2}}{2i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2ix}\frac{dx}{x^2+2x+2}=2\pi i\frac{e^{-2i-2}}{2i}=\pi e^{-2}\left(\operatorname{Cos}2+i\operatorname{Sin}(-2)\right)$$

$$=\pi e^{-2}\operatorname{Cos}2-i\pi e^{-2}\operatorname{Sin}2$$

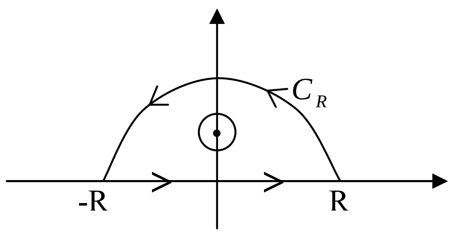
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Cos}2x\frac{dx}{x^2+2x+2}=R_e\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx=\pi e^{-2}\operatorname{Cos}2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Sin}2x\frac{dx}{x^2+2x+2}=I_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx=-\pi e^{-2}\operatorname{Sin}2$$

مثال 3: نشان دهید که:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Cos}(ax)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

حل: در حالت کلی می‌توان از روش زیر نیز برای محاسبه این گونه انتگرال‌ها استفاده کرد. مسیر زیر را درنظر می‌گیریم.



$$\int_C \frac{e^{iaz}}{Z^2+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{\text{Cos}\,ax}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\text{Sin}\,ax}{x^2+1}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{(Z^2+1)}dz$$

بدليل اينكه تابع $\frac{\text{Sin}(ax)}{x^2+1}$ فرد است، انتگرال دوم صفر است و انتگرال سوم بر روي مسير C_R نيز بدليل اينكه در شرايط قضيه صدق مي كند صفر است. بنابراين ابتدا با استفاده از قضيه كوشي اصل انتگرال سمت چپ را محاسبه مي كنيم.

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{e^{iaz}}{Z+i}}{Z-i} = f(i) = \frac{e^{-a}}{2i}$$

و در نتيجه وقتي كه $R \to +\infty$ داريم:

$$\int_C \frac{e^{iaz}}{Z^2+1}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Cos}\,ax}{x^2+1}dx = \pi e^{-a}$$

بنابراين:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Cos}(ax)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Cos}\,ax}{x^2+1}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

تمرينات:

1ـ نشان دهيد كه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\text{Cos}(\pi x)}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\text{Sin}(\pi x)}{x^2+2x+5}dx = -\pi e^{-2\pi}$$

درستي انتگرالهاي زير را تحقيق كنيد.

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

$$2)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Cos}\ dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2+b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right), (a > b > 0)$$

$$4)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\text{Sin}(ax)}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \text{Sin}(a)$$

$$5)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Cos}\ x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{8e}$$

$$6)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Sin}^2\ x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2})$$

$$7)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3\pi}{16a^5} \qquad (a > 0)$$

$$8)\ \int_0^{+\infty} \frac{\text{Cos}\ (mx)}{(a^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+am)e^{-am} \qquad a > 0\ ,\ m > 0$$

سريهاي مختلط

تعريف سري: عبارت $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را يك سري از اعداد مختلط مي گوئييم. دنباله مجموع جزيي سري را بصورت $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ براي هر n تعريف مي كنيم. اگر دنباله $\{S_n\}$ به عدد S همگرا باشد، آنگاه سري $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را همگرا و S حد مجموع آن مي باشد.

مثال 1: اگر $|Z|<1$، سري $\sum_{n=0}^{+\infty} Z^n$ به عدد $\frac{1}{1-Z}$ همگرا مي باشد. چون بنا به اتحاد لاگرانژ داريم:

$$1+Z+Z^2+\ldots+Z^n = \frac{1-Z^{n+1}}{1-Z}$$

و از $|Z|<1$، داريم $\lim_{n\to+\infty} Z^{n+1} = 0$ و نتيجه بدست مي آيد.

براي تعيين همگرايي سريهاي مختلط مي توان از قضاياي آزمون مقايسه اي و آزمون كسري استفاده كرد. ما در اينجا به بررسي سريهاي تواني مي پردازيم.

سريهاي تواني مختلط: اگر $\{a_n\}$ دنباله اي از اعداد باشد، آنگاه سري $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n$ ، يك سري تواني مي باشد. اگر سري فوق به ازاي $Z \in C$ همگرا باشد، آنگاه $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n$ موجود و تعريف شده است. دامنه تعريف تابع f برابر با دامنه همگرايي سري تواني $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n$ خواهد بود.

در اينجا به بررسي چند نمونه از سريهاي تواني مهم مي پردازيم.

قضيه تيلور: اگر تابع f بر روي و نقاط داخل دايره $|Z-a|=\gamma$ تحليلي بوده و Z_0 نقطه اي داخل دايره باشد، آنگاه:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (Z-Z_0)^n$$

كه در آن براي هر عدد طبيعي n داريم: $a_n=\dfrac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}$

سري داده شده را سري تيلور تابع f حول نقطه Z_0 مي نامند.

تذكر 1: اگر $Z_0=0$ باشد، سري تيلور را سري ماكلورين مي نامند.

تذكر 2: سري تيلور تابع f در دامنه همگرايي خود كه برابر با دامنه تحليلي تابع f مي باشد، يگانه است.

مثال: سري تيلور توابع e^z ، $\sin z$ و $\cos z$ را در نقطه $Z=0$ بنويسيد.

حل: با محاسبه مشتقات متوالي اين توابع و محاسبه آنها در نقطه $Z=0$ داريم:

$$e^Z=1+Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\ldots+\frac{Z^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin z=Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\frac{Z^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n\ Z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\cos z=1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n\ Z^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots$$

مثال 2: با توجه به اينكه:

$$\frac{1}{1-Z}=1+Z+Z^2+\ldots+Z^n+\ldots,\quad |Z|<1$$

بنابراين سري فوق يك سري تواني از تابع $f(Z)=\dfrac{1}{1-Z}$ در دامنه همگرايي $|Z|<1$ مي باشد.

به همين ترتيب:

$$\frac{1}{1+Z}=1-Z+Z^2-Z^3+\ldots+(-1)^n Z^n+\ldots\ ,\quad |Z|<1$$

براي تابع $f(x)=\dfrac{1}{1+Z}$ در دامنه $|Z|<1$ يك سري تواني است.

مثال 3: سري تيلور تابع $f(x)=\dfrac{1}{2-Z}$ را در دامنه $|Z|<2$ بنويسيد.

حل:

$$\frac{1}{2-Z}=\frac{1}{2(1-\frac{Z}{2})}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{Z}{2}}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{Z}{2}+(\frac{Z}{2})^2+\ldots+(\frac{Z}{2})^n+\ldots\right]$$

$$\left|\frac{Z}{2}\right|<1\Rightarrow |Z|<2$$

مثال 4) الف) بسط ماكلورين تابع $f(Z)=\log(1+Z)$ را بيابيد.

ب) ناحيه همگرايي سري قسمت الف را بيابيد.

ج) بسط ماكلورين تابع $f(Z)=\log\left(\dfrac{1+Z}{1-Z}\right)$ را بيابيد.

حل: با محاسبه مشتقات متوالي تابع $f(z)$ داريم:

$$f(Z)=\log(1+Z)$$

$$f'(Z)=\frac{1}{1+Z}$$

$$f''(Z)=-(1+Z)^{-2}\ ,\ f'''(Z)=(-1)(-2)(1+Z)^{-3},\ldots,$$

$$f^{(n+1)}(Z)=(-1)^n n!(1+Z)^{-(n+1)}$$

بنابراين:

$$f(0)=0\ .\ f'(0)=1\quad ,\quad f''(0)=-1\quad ,\quad f'''(0)=-2!\ ,\ldots,$$

$$f^{(n+1)}(0)=(-1)^n n!$$

در نتيجه سری ماكلورين تابع عبارت است از:

$$f(Z)=bg(1+Z)=f(0)+Zf'(0)+\frac{f''(0)}{2!}Z^2+\frac{f'''(0)}{3!}Z^3+\ldots$$

$$=Z-\frac{Z^2}{2}+\frac{Z^3}{3}-\frac{Z^4}{4}+\ldots$$

ب) جمله عمومي سري عبارت است از $U_n=\dfrac{(-1)^{n-1}Z^n}{n}$ ، پس

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{nZ}{n+1}\right|=|Z|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=|Z|$$

بنابراین ناحیه همگرایي سري $|Z|<1$ مي باشد، مي توان نشان داد که سري در $Z=1$ نیز همگراست.

حل ب)

$$\log(1+Z)=Z-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}-\frac{Z^5}{5!}+\dots$$

و در نتیجه:

$$\log(1-Z)=-Z-\frac{Z^2}{2!}-\frac{Z^3}{3!}-\frac{Z^5}{5!}+\dots$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)&=\log(1+Z)-\log(1-Z)\\&=2\left[Z+\frac{Z^3}{3}+\frac{Z^5}{5}+\dots\right]\\&=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2Z^{2n+1}}{2n+1}\qquad,\qquad |Z|<1\end{aligned}$$

قضیه لوران: اگر تابع f در نقطه a تعریف نشده یا غیر تحلیلی باشد، آنگاه نمی‌توان انتظار داشت که f دارای یک سری تیلور حول نقطه a یا بر حسب توانهای مثبت $Z-a$ باشد اما تابع f دارای یک سری بر حسب توانهای مثبت و منفی $Z-a$ خواهد بود که آن را سری لوران تابع f می‌خوانند.

قضیه: اگر C_1, C_2 دو دایره به مرکز a و شعاعهای γ_1 , γ_2 و تابع f روی نقاط بین دو دایره و نقاط روی دوایر تحلیلی باشد، آنگاه برای هر نقطه Z_0 بین دو دایره داریم:

$$f(Z_0)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(Z_0-a)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(Z_0-a)^{-n}$$

که در آن:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{(Z-a)^{n+1}}dz\ ,\ \ n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(Z-a)^{1-n}}dz\ ,\ \ n=1,2,3,\dots$$

اثبات قضیه را می‌توان در کتابهای توابع مختلط ملاحظه کرد.

تذکر: اولاً سری لوران در دامنه همگرایی خود یگانه است و ثانیاً برای محاسبه ضرایب a_n, b_n می‌توان از هر مرز بسته C که در ناحیه محدود به دو دایره C_1, C_2 است،استفاده کرد.

مثال 1: سری لوران تابع $f(Z)=\frac{1}{Z}$ را بنویسید.

حل: تابع f در نقطه $Z=0$ غیر تحلیلی و در نتیجه می‌توان سری لوران را بر حسب توانهای مثبت و منفی Z داشته باشیم. بنابراین $f(Z)=\frac{1}{Z}$ سری لوران f خواهد بود. در نتیجه:

$$b_1=1 \quad , \quad b_2=b_3=....=0 \quad . \quad a_n=0 \quad \forall n=0,1,2,...$$

مثال 2: سري لوران تابع $f(Z)=\frac{\operatorname{Sin} z}{Z^2}$ را بنویسید.

حل: تابع f در نقطه $Z=0$ غیر تحلیلی و در نتیجه داراي سری لوران بر حسب توانهای مثبت و منفی Z مي باشد.

$$\operatorname{Sin} z=1-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-...$$

$$\frac{\operatorname{Sin} z}{Z^2}=\frac{1}{Z}-\frac{Z}{3!}+\frac{Z^3}{5!}+...$$

سری لوران تابع $\frac{\operatorname{Sin} Z}{Z^2}$ خواهد بود. توجه شود که $b_1=1$, $b_2=0$ است.

مثال 3: سری لوران تابع $f(Z)=\frac{1}{Z^2+1}$ را بنویسید.

حل: تابع f در نقاط $Z=\pm i$ غیر تحلیلی و دارای سری لوران خواهد بود.

1ـ اگر $Z_0=i$ فرض کنید، آنگاه:

$$f(Z)=\frac{1}{Z^2+1}=\frac{1}{(Z+i)(Z-i)}$$

$$\frac{1}{(Z+i)(Z-i)}=\frac{1}{Z-i}=\frac{1}{Z-i}.\frac{1}{Z-i+2i}$$

$$=\frac{1}{Z-i}.\frac{1}{2\left[1+\frac{Z-i}{2i}\right]}$$

$$=\frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{Z-i}-\frac{1}{2i}+\frac{Z-i}{(2i)^2}-\frac{(Z-i)^2}{(2i)^3}+...\right], \qquad 0<|Z-i|<2$$

سري لوران f در نقطه $Z=i$ در دامنه $0<|Z-i|<2$ مي باشد.

$$\frac{1}{(Z+i)(Z-i)}=\frac{1}{Z+i}\left[\frac{1}{(Z+i)-2i}\right]=\frac{1}{Z+i}\left[\frac{1}{1+\frac{Z+i}{2i}}\right]\frac{-1}{2i},$$

$$=\frac{-1}{2i}\frac{1}{Z+i}\left[1+\frac{Z+i}{2i}+\left(\frac{Z+i}{2i}\right)^2+\left(\frac{Z+i}{2i}\right)^3+\dots\right],$$

$$0<\left|\frac{Z+i}{2i}\right|<1$$

$$=\frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{Z+i}+\frac{1}{2i}+\frac{Z+i}{(2i)^2}+\frac{(Z+i)^2}{(2i)^3}+\dots\right],\ 0<|z+i|<2$$

سري لوران f در نقطه $Z=-i$ در دامنه $0<|Z+i|<2$.

مثال 4: سري لوران تابع $f(Z)=\frac{1}{Z^2+1}$ در دامنه $|Z|<1$ بنويسيد.

حل: سري زير در دامنه داده شده همگرا مي باشد.

$$\frac{1}{1+Z}=1-Z+Z^2+\dots,\qquad |Z|<1$$

بنابراين:

$$\frac{1}{1+Z^2}=1-Z^2+Z^4+\dots,\qquad |Z|<1$$

مثال 5: اگر $f(Z)=\frac{1}{(Z-1)(Z-2)}$ باشد، سري لوران f را بنويسيد.

حل: تابع f در نقاط $Z=2$, $Z=1$ غير تحليلي و در نتيجه داراي سري لوران است.

1ـ اگر $Z=1$ ، آنگاه:

$$\frac{1}{(Z-1)(Z-2)}=\frac{1}{Z-1}.\frac{1}{Z-1-1}=\frac{-1}{Z-1}.\frac{1}{1-(Z-1)}$$

$$=\frac{-1}{Z-1}\left[1+(Z-1)+(Z-1)^2+(Z-1)^3+\dots\right]$$

$$=\frac{-1}{Z-1}-1-(Z-1)-(Z-1)^2-\dots\qquad ,0<|Z-1|<1$$

و در حالت $Z=2$ ، داريم:

$$\frac{1}{(Z-1)(Z-2)}=\frac{1}{(Z-2)}.\frac{1}{Z-2+1}=\frac{-1}{Z-2}\left[1-(Z-2)+(Z-2)^2\dots\right]$$

$$0<|Z-2|<1$$

$$=\frac{-1}{Z-2}-1+(Z-2)-(Z-2)^2\pm\dots\qquad ,0<|Z-2|<1$$

مثال 6: بسط لوران تابع $f(Z)=\dfrac{e^{2z}}{(Z-1)^3}$ در نقطه $Z=1$ بنويسيد.

حل: تابع f در نقطه $Z=1$ غير تحليلي است. با استفاده از تغيير متغير $Z-1=U$ داريم:

$$=\frac{e^{2Z}}{(Z-1)^3}=\frac{e^{2+2U}}{U^3}=\frac{e^2}{U^3}.e^{2U}=\frac{e^2}{U^3}\left[1+2U+\frac{(2U)^2}{2!}+\frac{(2U)^3}{3!}+\ldots\right]$$

بنابراين سري لوران f(z) عبارت است از:

$$=\frac{e^2}{(Z-1)^3}+\frac{2e^2}{(Z-1)^2}+\frac{2e^2}{Z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(Z-1)+\ldots$$

پس $Z=1$ قطب مرتبه سوم تابع f(z) است.

مثال 7: بسط لوران تابع $f(Z)=\dfrac{Z-\operatorname{Sin}Z}{Z^3}$ را در $Z=0$ بنويسيد.

حل: تابع f(z) در $Z=0$ غير تحليلي است، پس داراي سري لوران مي باشد.

$$f(Z)=\frac{Z-\operatorname{Sin}Z}{Z^3}=\frac{1}{Z^3}\left[Z-(Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}+\ldots)\right]$$

$$=\frac{1}{Z^3}\left[\frac{Z^3}{3!}-\frac{Z^5}{5!}+\frac{Z^7}{7!}-\ldots\right]$$

پس سري لوران تابع عبارت است از:

$$=\frac{1}{3!}-\frac{Z^2}{5!}+\frac{Z^4}{7!}\ldots.$$

تمرينات:

1ـ بسط ماکلورين تابع $f(Z)=\dfrac{Z+1}{Z-1}$ و ناحيه همگرايي آنرا بيابيد.

2ـ بسط لوران تابع $f(Z)=\dfrac{1}{(Z-1)(Z-2)}$ را در دامنه هاي زير بيابيد.

الف) $1<|Z|<2$ ب) $|Z|<1$ ج) $|Z|>2$

3ـ سري تيلور تابع $f(Z)=\operatorname{Sin} Z$ را حول $Z=\dfrac{\pi}{4}$ نوشته و دامنه همگرايی آنرا بيابيد.

4ـ سري لوران توابع زير را در نقاط داده شده بيابيد.

الف) $(Z-3)\operatorname{Sin}\left(\dfrac{1}{Z+2}\right) \quad , \quad Z=-2$

ب) $\dfrac{1}{(Z+1)(Z+2)} \quad , \quad Z=2$

ج) $\dfrac{1}{Z^2(Z-3)^2} \quad , \quad Z=3$

5ـ اگر $0<|Z|<4$ ثابت کنيد $\dfrac{1}{4Z-Z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{Z^{n-1}}{4^{n+1}}$:

6ـ سري لوران تابع $f(Z)=\dfrac{1}{Z-3}$ را در دامنه هاي زير بنويسيد.

الف) $|Z|>3$ ب) $|Z|<3$