فصل سوم

معادلات دیفرانسیل جزئی
Partial Differential Equations

مقدمه:
این بخش تعدادی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که دارای اهمیت فوق العاده ای در کاربردهای مهندسی هستند را معرفی می کند. این معادلات از اصول فیزیکی استخراج می شوند و در آنها روشهای حل مسائل شرائط اولیه و شرائط مرزی نیز بررسی می شود.

- مفاهیم اولیه:
چنانچه می دانید معادله ای که حاوی یک یا چند مشتق جزئی یک تابع مجهول باشد را معادله دیفرانسیل جزئی (با مشتقات جزئی) می نامند.

توان بزرگترین مشتق مرتبه معادله نامیده می شود.

مثال: بعضی از معادلات دیفرانسیل جزئی مهم که از مرتبه دوم بوده و خطی نیز هستند در اینجا آورده می شود:

معادله موج یک بعدی $1)\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

معادله گرمای یک بعدی $2)\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

معادله لاپلاس دو بعدی $3)\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

معادله پواسون دو بعدی $4)\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$

معادله لاپلاس سه بعدی $5)\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

در تمام معادلات بالا c یک ثابت است، t زمان است، x,y,z مختصات دکارتی هستند و در معادله (4) چنانچه $f \neq 0$ باشد معادله را غیر همگن می نامند.

بقیه معادلات همگن هستند.

جواب معادلات دیفرانسیلی جزئی:
معادلات دیفرانسیل جزئی نیز همانند معادلات دیفرانسیل معمولی دارای جوابی هستند که در معادله صدق می کند ولی این نکته باید در نظر گرفته شود که یک معادله دیفرانسیل ممکن است جوابهای متعدد داشته باشد مانند معادله:

(در دو بعد) $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

که می تواند جوابهایی مانند:

$$u = x^2 - y^2$$
$$u = e^x \cos y$$
$$u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

داشته باشد.

بدین ترتیب چگونه باید جوابهای معادله دیفرانسیل را منحصر بفرد یا Unique کرد. معمولاً منحصر بفرد کردن جواب معادله دیفرانسیلی با وجود شرائط دیگر میسر است:

شرائط مرزی:

بسیاری اوقات جواب کلی یک معادله دیفرانسیلی با بکارگیری شرائط مرزی در حوالی منطقه ای که جواب داریم منحصر بفرد می شود.

شرائط اولیه:

در بسیاری از اوقات دیگر چنانچه معادله دیفرانسیلی دارای متغیر زمان (t) باشد مقدار جواب در $t = 0$ از قبل معلوم است که به آن شرط اولیه می گویند. استفاده از شرائط اولیه نیز جواب کلی معادله دیفرانسیلی را منحصر بفرد می کند.

قضیه:

چنانچه u_1 و u_2 دو جواب مستقل یک معادله دیفرانسیلی جزئی همگن خطی باشند آنگاه $u = c_1u_1 + c_2u_2$ نیز جواب دیگری برای همان معادله دیفرانسیلی خواهد بود. این موضوع را در مورد معادلات دیفرانسیلی معمولی نیز داشتیم.

تمرینات:

1- نشان دهید که توابع زیر جوابهای معادله موج به فرم $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ هستند:

a) $u = x^2 + t^2$

b) $u = x^2 + 9t^2$

c) $u = \cos t \sin x$

d) $u = \sin(\omega ct) \sin(\omega x)$

2 – نشان دهید که توابع زیر جوابهای معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ هستند:

a) $u = e^{-t} \cos x$

b) $u = e^{-t} \sin x$

c) $u = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x$

3– نشان دهید که توابع زیر جوابهای معادله لاپلاس دو بعدی هستند:

a) $u = arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)$

b) $u = \sin x \sin hy$

c) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

4 – نشان دهید که تابع $u(x_1 y) = a\ln\left(x^2 + y^2\right) + b$ در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می کند سپس از شرائط مرزی زیر مقادیر a و b را پیدا کنید.

شرط اول: $u = 0$ روی دایره $x^2 + y^2 = 1$

شرط دوم: $u = 3$ روی دایره $x^2 + y^2 = 4$

2 – معادله موج یک بعدی (مدل سازی یک ریسمان مرتعش شونده)

معادله حرکت یک ریسمان مرتعش شونده یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که بفرم زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{که در آن} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

(نیروی کشش ریسمان =T)

(چگالی جرمی ریسمان به ازاء واحد طول = ρ)

برای آشنایی با چگونگی بدست آوردن معادله موج بالا به منبع 1 مراجعه کنید.

3– جداسازی متغیرها برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی:

دیدیم که برای ارتعاشات یک ریسمان الاستیک معادله موج یک بعدی حاکم است. در اینجا روش حل این معادله را همراه با معرفی شرائط مرزی و شرائط اولیه بیان می کنیم. روشی که در اینجا مطرح می شود به روش **جداسازی متغیرها** موسوم است.

چنانچه می دانیم در معادله موج یک بعدی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تابع $u(x,t)$ نشان دهنده انحراف ریسمان از وضعیت تعادل است. چون ریسمان در دو انتها محکم بسته شده است پس می توان نوشت:

شرائط مرزی $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$

(l طول ریسمان)

از آنجا که حرکت ریسمان بستگی به انحراف اولیه و هم چنین به سرعت اولیه ریسمان دارد پس اگر انحراف اولیه ریسمان را به $f(x)$ و سرعت اولیه آنرا به $g(x)$ نشان دهیم دو شرط اولیه بشرح زیر نیز خواهیم داشت:

شرائط اولیه $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \end{cases}$

حال کار ما آن است که $u(x,t)$ را بگونه ای پیدا کنیم که شرائط مرزی و شرائط اولیه را ارضاء نماید.

برای پیدا کردن جواب سه مرحله زیر انجام می شود:

مرحله اول:

فرض کنید $u(x,t)=F(x)G(t)$

به عبارت دیگر جواب بصورت حاصلضرب دو تابع که هر کدام به تنهائی تابعی از یکی از متغیرها هستند نوشته می شود. این روش را **روش جداسازی متغیرها** یا **روش حاصلضربی** می نامند.

تمرین: در چه مواقعی می توان جواب نهائی را بشکل حاصلضرب دو تابع که هر کدام تابعی از یکی از متغیرها هستند نوشت؟

حال کار را ادامه می دهیم. به عبارت دیگر از $u(x,t)$ مشتق گرفته و در معادله موج اصلی قرار می دهیم:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[F(x)G(t)\right]=F(x)\frac{\partial G(t)}{\partial t}=F(x)\dot{G}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_1t)}{\partial t^2}=F(x)\ddot{G}=F\ddot{G}$$

بهمین ترتیب $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(x)G(t)\right]=F'(x)G(t)$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=F''(x)G(t)=F''G$$

با جایگذاری عبارت های محاسبه شده در معادله موج داریم:

$$F\ddot{G}=c^2F''G$$

طرفین رابطه بالا را بر c^2FG تقسیم می کنیم، داریم:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$$

طرف چپ رابطه بالا فقط تابعی از t است و طرف راست آن فقط تابعی از x است پس هر طرف باید مساوی ثابتی باشد که ما آنرا k می نامیم (چرا) پس:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$$

رابطه اخیر دو معادله دیفرانسیلی خطی معمولی به ما می دهد:

$$F''-kF=0$$

$$\ddot{G}-c^2kG=0$$

مرحله دوم:

در این مرحله دو معادله معمولی بدست آمده را حل می کنیم و ضمن حل نیز به شرائط مرزی اولیه توجه می کنیم، یعنی:

برای تمام t ها $\begin{cases} u(0,t)=0=F(0)G(t) \\ u(l,t)=0=F(l)G(t) \end{cases}$ شرائط مرزی

عبارات بالا نشان میدهد که:

$u(0,t)=0 \Rightarrow F(0)=0$ یا $G(t)=0$ (این جواب بدیهی است)

پس دنبال حالتی می گردیم که $G(t)\neq 0$ باشد یعنی $F(l)=0$ و $F(0)=0$

جوابها:

1) $for\ \ k=0 \ \Rightarrow$ جواب کلی $\Rightarrow\ F=ax+b$

که از رابطه $F(0)=0$ و $F(l)=0$ خواهیم داشت $a=b=0$ که این جواب نیز مورد علاقه ما نیست و بدیهی است.

2) $for\ \ k=\mu^2$ (مثبت) جواب کلی $\Rightarrow\ F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$

برای این جواب نیز از روابط $F(0)=0$ یا $F(l)=0$ حاصل می شود که $A=B=0$ که این نیز مورد توجه نیست.

3) پس تنها حالتی که باید بررسی شود آن است که:

$k=-\rho^2$ (منفی)

$\Rightarrow\ F''+\rho^2F=0 \ \Rightarrow\ F(x)=A\cos\rho x+B\sin\rho x$

حال از روابط $F(0)=0$ و $F(l)=0$ استفاده می کنیم، داریم:

$F(0)=0 \quad \Rightarrow \quad A=0$

$F(l)=0 \quad \Rightarrow \quad B\sin\rho l=0$

$if\ \ B\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\rho l=0 \ \Rightarrow\ \rho l=n\pi$ یا $\rho=\dfrac{n\pi}{l}$

(n عدد صحیح)

چون ثابتهای A و B دلخواه هستند می توان B=1 گرفت، پس:

$F_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$

ملاحظه می شود که به این ترتیب مقدار k محدود می شود به:

$k=-\rho^2=-\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$

با بکارگیری مقادیر k بالا خواهیم داشت:

$\ddot{G}+\left(\dfrac{cn\pi}{l}\right)G=0$

اگر

$\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{l} \quad \Rightarrow \quad \ddot{G}+\lambda_n^2G=0$

جواب کلی معادله بالا بشکل زیر خواهد بود:

$G_n(t)=B_n\cos\lambda_nt+B_n^*\sin\lambda_nt$

حال با داشتن $F_n(x)$ و $G_n(t)$ می توان شکل کلی $u(x,t)=FG$ را تشکیل داد:

$$u_n(x,t)=\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

معادله بالا جواب معادله موج یک بعدی است در این جواب:

$u_n(x,t)$ ها را **توابع ویژه** می گویند.

$\lambda_n=\left(\dfrac{cn\pi}{l}\right)$ ها را **مقادیر ویژه** می گویند.

و به مجموعه λ_n ها $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n)$ طیف ارتعاشی ریسمان گفته می شود.

نکته مهم:

به مقادیر $\dfrac{\lambda_n}{2\pi}=\dfrac{cn}{2l}$ توجه کنید.

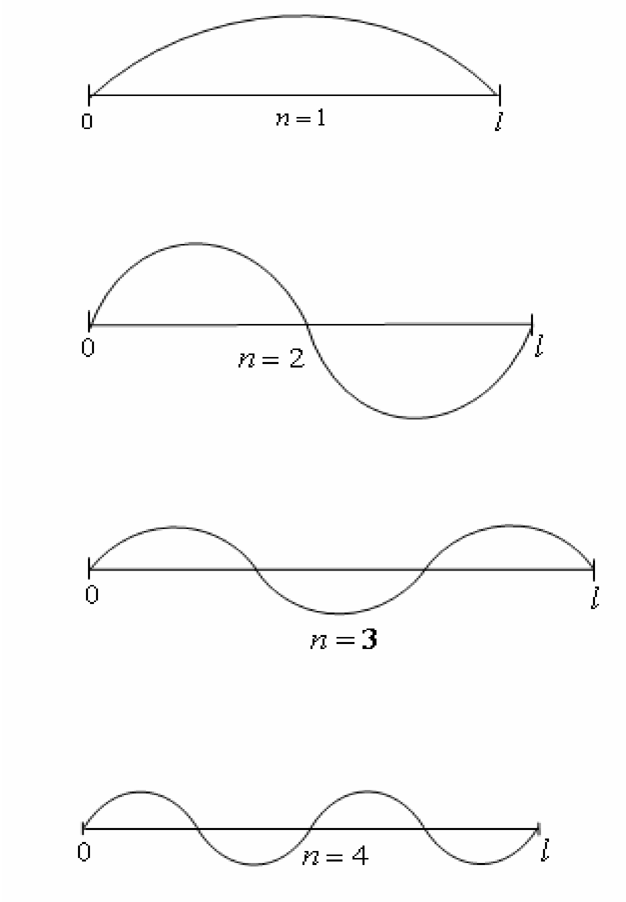
این مقادیر فرکانسهای ارتعاشی ریسمان هستند.

اگر n=1 باشد ریسمان در اولین وجه طبیعی خود (first normal mode) در حال ارتعاش است. این اولین وجه طبیعی را **وجه اصلی** نیز می گویند.

اگر n=2 باشد ریسمان در وجه هارمونیک اول خود در حال ارتعاش است تا آخر:

چون تابع $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ در نقاط $x=\dfrac{l}{n}\,,\ \dfrac{2l}{n}\,,...,\dfrac{n-1}{n}l$ صفر می شود، این نقاط را نود (node) می گویند. از خصوصیات این نقاط آن است که ریسمان در این نقاط حرکتی ندارد.

شکل زیر حرکت ارتعاشی ریسمان را با nهای مختلف نشان می دهد:



مرحله سوم:

بدیهی است که یک جواب یگانه مانند $u_n(x,t)$ بطور کلی نمی تواند شرائط اولیه $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \end{cases}$ را برآورده کند. طبق قضایایی که در درس معادلات دیفرانسیل دیده اید حاصل جمع کلیه $u_n(x,t)$ها نیز جواب معادله موج خواهد بود، پس:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(A)}$$

با توجه به شرائط اولیه $u(x,0)=f(x)$ داریم:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \qquad \textbf{(B)}$$

به این ترتیب ما باید B_n ها را بدست آوریم.

B_n ها به شکل زیر بدست خواهند آمد:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n=1,2,...$$

عبارت بالا که نشان دهنده مقدار B_n است در درس سری فوریه بطور کامل مورد بحث قرار خواهد گرفت. فعلاً به این مقدار بسنده می کنیم که معادله $u(x,0)$ که در بالا بدست آمده است در حقیقت نشان می دهد که $f(x)$ برحسب سری فوریه بسط سینوسی داده شده است. ضرائب بسط (B_n) از رابطه بالا محاسبه می شوند.

حالا برای برآورده کردن شرط $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$ داریم:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)$$

در اینجا نیز ملاحظه می شود که $g(x)$ بر حسب سری سینوسی فوریه بسط داده شده است، پس:

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

و چون $\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{l}$ پس:

$$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ \ ; \ \ n=1,2,...$$

نتیجه:

معادله (A) جواب معادله موج است که کلیه شرائط مرزی و شرائط اولیه را ارضاء می کند. بشرطی که این معادله یک سری همگرا باشد.

ملاحظه می کنید که برای صدق کردن معادله (A) در معادله موج باید عبارات $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را نیز تشکیل دهیم این دو عبارت نیز سریهایی خواهند بود که باید همگرا باشند.

در اینجا حالت خاصی در نظر می گیریم که در آن یک نکته جالب فیزیکی نهفته است.

حالت خاص:

فرض کنید $g(x)=0$ باشد یعنی $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ یعنی سرعت اولیه صفر باشد در اینصورت چنانچه به جواب معادله نگاه کنید (معادله (A)) B_n^* صفر خواهد شد و داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi x}{l} \ ; \ \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$$

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر:

$$\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}-\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}+\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

از جمع طرفین اول و دوم عبارات بالا داریم:

$$\frac{1}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\lambda_n t\right]$$

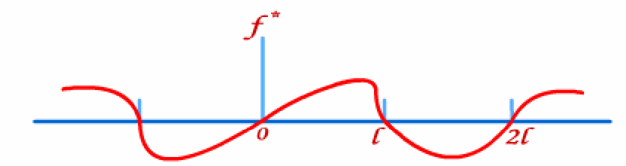
پس:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}$$

حال با کمی دقت به معادله بالا و معادله (B) که نشان دهنده بسط $f(x)$ است ملاحظه می کنیم که اگر در معادله $f(x)$، x را به $x-ct$ و $x+ct$ تبدیل نمائیم دو عبارت بالا در رابطه $u(x,t)$ حاصل خواهد شد، یعنی:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right]$$

در رابطه بالا f^* تابع تناوبی فرد f با تناوب $2l$ نامیده می شود که در شکل زیر نشان داده شده است:



نکته فیزیکی دراین حالت خاص آن است که $f^*(x-ct)$ که از جابجائی $f^*(x)$ به اندازه ct حاصل می شود نشان دهنده موجی است که با افزایش t بسمت راست حرکت می کند و بهمین ترتیب $f^*(x+ct)$ نمایانگر موجی است که به سمت چپ در حال حرکت است و $u(x,t)$ حاصل جمع این دو موج راست رونده و چپ رونده است.

4- جواب دالامبر برای معادله موج $\left(D'\ Alembert's\ Solution\right)$

در اینجا جواب معادله موج یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را بگونه ای دیگر می نویسیم که در نوع خود جالب است.

حال دقت کنید اگر در معادله موج متغیرهای جدیدی مانند:

$$\begin{cases} \upsilon = x + ct \\ Z = x - ct \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

تعریف کنیم و معادله موج را با توجه به این متغیرها بنویسیم عبارت قبلی که جواب معادله موج بود یعنی $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right]$ براحتی قابل استخراج است.

قبل از هر چیز لازم است در اینجا نمادهای جدیدی بکار گیریم که در آینده نیز از آنها استفاده خواهد شد:

$$\upsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad Z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

از روابط (A) داریم: $\upsilon_x = 1 \quad , \quad Z_x = 1$

در اینجا $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$ را حساب می کنیم:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = u_u + u_z$$

$$u_{xx} = \left(u_u + u_z\right)_x = \left(u_u + u_z\right)_u \upsilon_x + \left(u_u + u_z\right)_z Z_x$$

پس

$$u_{xx} = u_{uu} + 2u_{uz} + u_{zz}$$

بهمین ترتیب:

$$u_{tt} = c^2\left(u_{uu} - 2u_{uz} + u_{zz}\right)$$

با قرار دادن $u_{tt}\ ,\ u_{xx}$ در معادله موج بشکل $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ داریم:

$$u_{uu} + 2u_{uz} + u_{zz} = c^4\left(u_{uu} - 2u_{uz} + u_{zz}\right)$$

برابری رابطه بالا نشان می دهد که:

$$u_{uz} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial z} = 0$$

ملاحظه می شود که با تغییر متغیرهای ذکر شده، به معادله ای می رسیم که با دو بار انتگرال گیری جواب u را به ما می دهد یعنی مشتق گیری نسبت به z خواهد داد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial z} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial u} = h(u)$$

$$\Rightarrow\ u = \int h(u)du + \psi(z)$$

که در آن $\psi(z)$ تابع دلخواهی از z است اگر $\int h(u)du = \phi(u)$ پس:

$$u(uz) = \phi(u) + \psi(z)$$

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

معادله بالا به جواب دالامبری معادله موج معروف است.

بررسی حالت خاص گذشته:

در اینجا نیز ϕ و ψ با توجه به شرائط اولیه قابل محاسبه خواهند بود. حالت خاص گذشته را که در آن سرعت اولیه صفر بوده و $u(x,t)=f(x)$ را بررسی می کنیم:

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

مشتق گیری $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c\,\phi'(x+ct)-c\,\psi'(x-ct)$

که در آن علامت (Prime) نشان دهنده مشتق گیری نسبت به کل $x+ct$ و $x-ct$ است.

حال:

$$u(x,0)=\phi(x)+\psi(x)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\psi'(x)=0$$

از رابطه دومی نتیجه می شود که $\psi'=\phi'$، پس:

$$\psi=\phi+k$$

حال با توجه به این دو رابطه:

$$\begin{cases} f(x)=\phi+\psi \\ -k=\phi-\psi \end{cases}$$

$$f(x)-k=2\phi \;\Rightarrow\; 2\phi+k=f(x) \;\Rightarrow\; \phi=\frac{f(x)-k}{2}$$

پس:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]$$

ملاحظه خواهید کرد که جواب بالا دقیقا همان جوابی است که قبلاً بدست آمده بود.

در اینجا دانشجویان می توانند نشان دهند که بخاطر وجود شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases}$ تابع f باید یک تابع فرد با تناوب $2l$ باشد.

جواب ما نشان می دهد که شرائط اولیه و شرائط مرزی جواب معادله موج را منحصر بفرد می کند.

5- جریان گرمائی یک بعدی

جریان گرما در جسمی که متشکل از ماده همگن است توسط معادله زیر توصیف می شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\nabla^2 u \quad ; \quad c^2=\frac{k}{\sigma\rho}$$

دمای جسم : $u(x,y,z)$

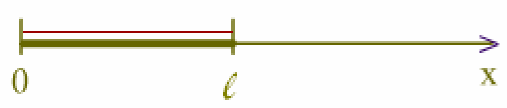
ضریب هدایت گرمائی جسم: k

گرمای ویژه جسم: σ

دانسیته جرمی جسم: ρ

مثال:

معادله جریان گرما را برای یک میله باریک بلند یا یک سیم دارای سطح مقطع ثابت که روی محور x کشیده شده است را حل می کنیم (شکل زیر)



به این ترتیب u فقط بستگی به x و t دارد و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادله بالا را برای نمونه های مهمی از شرائط اولیه حل می کنیم.

روش حل این معادله مشابه روشی است که برای حل معادله موج استفاده کردیم با این تفاوت که در اینجا رفتار جواب با رفتار جواب در معادله موج متفاوت است چون در اینجا مشتق درجه 1 نسبت به زمان داریم در حالی که در معادله موج مشتق درجه 2 نسبت به زمان داشتیم.

برای شروع فرض کنید که دو سر میله یعنی نقاط $x=0$ و $x=l$ در دمای صفر نگهداشته شوند به عبارت دیگر **شرائط مرزی** عبارتند از:

برای همه زمانها $u(0,t)=0 \quad , \quad u(l,t)=0$

اگر $f(x)$ دمای اولیه میله باشد آنگاه **شرط اولیه** عبارتست از:

$$u(x,0)=f(x)$$

حال باید جواب معادله جریان گرمای یک بعدی را طوری بدست آوریم که شرائط مرزی و شرط اولیه بالا را ارضاء نماید.

مرحله اول:

ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل اولیه داریم:

$$F\dot{G}=c^2F''G \quad ; \quad \dot{G}=\frac{dG(t)}{dt} \quad ; \quad F''=\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

$$\frac{F\dot{G}}{c^2FG}=\frac{c^2F''G}{c^2FG} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{G}(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}$$

ملاحظه می شود که در معادله بالا طرف چپ تابعی از t و طرف راست تابعی از x است پس هر طرف باید برابر با یک ثابت باشد.

دانشجویان گرامی مطابق حالتی که در آن معادله موج حل شد می توانند نشان دهند که اگر این ثابت (k) بزرگتر یا مساوی صفر باشد $(k \ge 0)$ تنها جواب بدیهی که شرائط مرزی و شرط اولیه را ارضا کند جواب $u=FG=0$ است که البته مدنظر ما نیست.

ولی برای مقادیر منفی k یعنی $k=-\rho^2$ داریم:

$$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=-\rho^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''+\rho^2F=0 \\ \dot{G}+c^2\rho^2G=0 \end{cases}$$

مرحله دوم

در این مرحله جوابهای F(x) و G(t) را بدست می آوریم، یعنی:

$$F(x)=A\cos\rho x+B\sin\rho x$$

اعمال شرائط مرزی $\Rightarrow \begin{cases} u(0,t)=F(0)G(t)=0 \\ u(l,t)=F(l)G(t)=0 \end{cases}$

از اعمال دو شرط مرزی بالا نتیجه می گیریم که چون $G(t)\neq 0$ پس:

$$F(0)=0 \quad , \quad F(l)=0$$

پس $F(0)=A\cos(0)+B\sin(0)=\ A=0$

در نتیجه:

$$F(l)=B\sin\rho l$$

ملاحظه می شود که باید $B\neq 0$ باشد، پس:

$$\sin\rho l=0 \quad \Rightarrow \quad \rho=\frac{n\pi}{l} \quad ; \quad n=1,2,...$$

حال با توجه به اینکه B یک ثابت اختیاری است می توان آنرا مساوی 1 گرفت پس B=1 در نتیجه:

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

حال به معادله دیفرانسیلی بر حسب G بر می گردیم:

اگر $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ خواهیم داشت:

$$\dot{G}+\lambda_n^2G=0$$

$$\Rightarrow \quad G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n^2t}$$

B_n = ثابت

پس بطور کلی خواهیم داشت:

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2t}$$

مرحله سوم:

حال باید جواب بالا را بشکلی در آوریم که شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ را ارضاء کند لذا به سری زیر دقت می کنیم (این سری از کجا آمده است)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)$$

شرط اولیه

معادله بالا صرفنظر از اینکه چگونه بدست آمده است معادله ایست که نشان می دهد $f(x)$ به شکل یک بسط فوریه از توابع سینوسی نوشته شده است و در مبحث سری فوریه خواهیم دید که B_n از رابطه زیر بدست می آید:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n=1,2,...$$

به این ترتیب ملاحظه می شود که تابع دما در میله یعنی $u(x,t)$ بدست آمده است و کلیه ثابتهائی که در عبارت $u(x,t)$ لازم است همگی معلوم هستند.

تمرین:

فرض کنید تابع $f(x)$ که در شرط اولیه مطرح شد بشکل زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x & when \quad 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x & when \quad \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$

با توجه به تابع دو حالته $f(x)$ مقدار B_n از عبارت بالا بدست می آید:

$$B_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

اگر انتگرال ها را حساب کنید خواهید داشت:

$$n=\text{زوج} \quad \Rightarrow \quad B_n=0$$

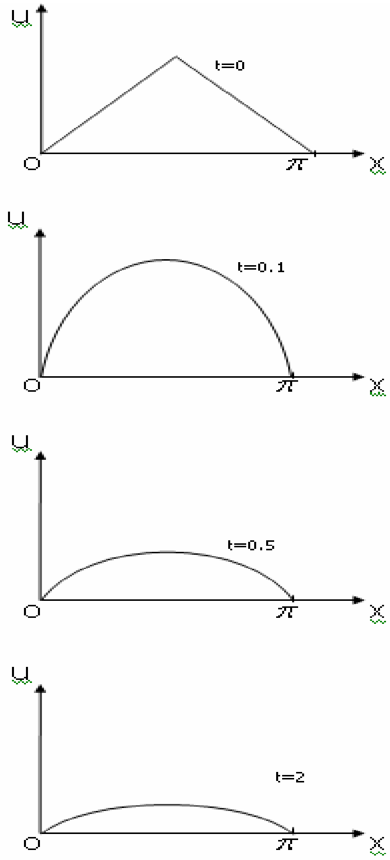
$$n=1,5,9,... \quad \Rightarrow \quad B_n=\frac{4l}{n^2\pi^2}$$

$$n=3,7,11,... \quad \Rightarrow \quad B_n=\frac{-4l}{n^2\pi^2}$$

در نتیجه جواب نهائی عبارتست از:

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l}e^{-(c\pi/l)^2 t}-\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}e^{-(3c\pi/l)^2 t}+...\right]$$

شکل زیر جواب u را بر حسب x برای tهای مختلف نشان می دهد:



6 - غشای مرتعش – معادله دو بعدی موج

وقتی یک غشای نازک دو بعدی از حالت تعادل خود منحرف می شود به ارتعاش در می آید معادله حاکم بر ارتعاش این غشاء یک معادله دیفرانسیل دو بعدی است که به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

حل این معادله که به معادله موج دو بعدی نیز مشهور است میتواند $u(x,y,t)$ را که معرف دامنه نوسان حرکت ارتعاشی غشاء است را بدست دهد.

در بررسی ارتعاش غشاهای نازک فرضیات زیر مد نظر است:

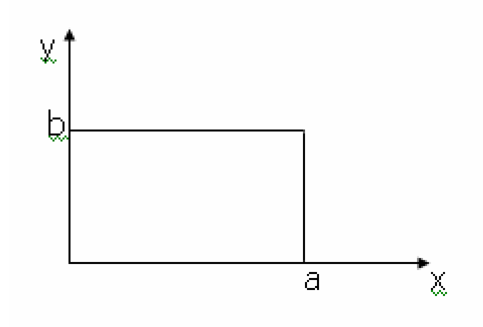
1) جرم بر واحد سطح غشاء ثابت است (غشای همگن). همچنین غشاء نازک و انعطاف پذیر است و در مقابل خمش مقاومتی از خود نشان نمی دهد.

2) غشاء به شکل کشیده و در صفحه xy از اطراف محکم نگهداشته شده است. نیروی کشش T ناشی از کشیدگی غشاء در تمام نقاط غشاء و در تمام جهات ثابت است.

3) میزان انحراف یا دامنه نوسان غشاء $u(x,y,t)$ در مقایسه با ابعاد غشاء کوچک است همچنین کلیه زوایای انحرافی نیز کوچک فرض می شود.

6-1: غشای مستطیلی

شکل زیر یک غشای مستطیل شکل را نشان می دهد که در صفحه xy در اطراف مرزهایش محکم شده است.



برای بررسی نوسان این غشاء باید معادله موج دو بعدی حل شود این معادله در دو بعد عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)$$

(روی مرزهای غشاء برای تمام tها) $u=0 \leftarrow$ شرط مرزی

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y)= & \text{جابجائی اولیه غشاء که معلوم است} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y)= & \text{سرعت اولیه نوسانی غشاء که معلوم است} \end{cases}$$

مرحله اول:

دراینجا نیز با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله موج دو بعدی:

$$F\ddot{G}=c^2\left(F_{xx}G+F_{yy}G\right) \qquad \text{(A)}$$

که مطابق قبل نمادها عبارتند از:

$$\ddot{G}=\frac{d^2G(t)}{dt^2}$$

$$F_{xx}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \quad , \quad F_{yy}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$$

با تقسیم معادله (A) بر c^2FG خواهیم داشت:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}\left(F_{xx}+F_{yy}\right)=-v^2$$

فقط تابعی از t　　　　　توابعی از x و y　　　　　یک عدد ثابت منفی

$$\Rightarrow \ddot{G}+\lambda^2G=0 \qquad (\lambda=cv)$$

$$F_{xx}+F_{yy}+v^2F=0 \qquad (B)$$

حال برای حل معادله (B) یکبار دیگر از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$F(x_1 y) = H(x)Q(y)$$

با جایگذاری معادله بالا در معادله (B) داریم:

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q = -\left(H\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2 HQ\right)$$

با تقسیم این رابطه بر HQ می توان نوشت:

$$\underbrace{\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2}}_{\text{x فقط تابعی از}} = \underbrace{\frac{-1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2 Q\right)}_{\text{y فقط تابعی از}} = \underbrace{-k^2}_{\text{یک عدد ثابت منفی}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2H}{dx^2} + k^2 H = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2} + \left(v^2 - k^2\right)Q = 0$$

مرحله دوم:

اگر $\rho^2 = v^2 - k^2$ باشد داریم:

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$Q(y) = c\ \cos \rho y + D\sin \rho y$$

$$A, B, C, D = \text{ثابت}$$

با توجه به شرط مرزی که $F = HQ$ باید روی مرزها صفر باشد به شرائط زیر می رسیم:

الف)

$$H(0) = 0 \quad ; \quad H(a) = 0$$

$$\Rightarrow\ H(0) = A = 0 \quad , \quad H(a) = B\sin ka = 0$$

$$k = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad B \neq 0$$

ب)

$$Q(0) = 0\ ,\ Q(b) = 0$$

$$Q(0) = c = 0 \quad ; \quad Q(b) = D\sin \rho b = 0$$

$$\rho = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad D \neq 0$$

در نهایت جوابها عبارتند از:

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow F_{mn}(x_1 y) = H_m(x)Q(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$m = 1, 2, \ldots$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

حال با توجه به روابط $\rho^2 = v^2 - k^2$ و $\lambda = cv$ که قبلاً معرفی شدند داریم:

$$\lambda = c\sqrt{k^2+\rho^2} = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

و $G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$

که در نهایت جواب $u_{mn}(x,y,t)$ عبارتست از

$$u_{mn}(x,y,t) = \left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\ \ \sin\frac{n\pi y}{b}$$

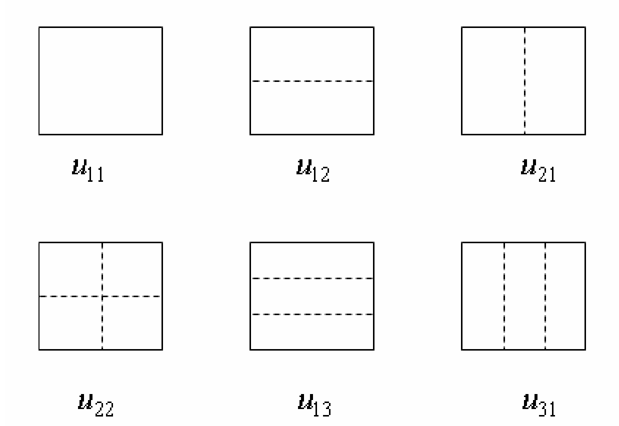
مانند گذشته λ_{mn}ها مقادیر ویژه و u_{mn}ها توابع ویژه یک غشای ارتعاشی را تشکیل می دهند.

مفهوم مقادیر ویژه و توابع ویژه برای یک غشای ارتعاشی چیست؟

نکته:

با تغییر a و b، توابع مختلف F_{mn} بدست می آیند که همگی متناظر به یک مقدار ویژه هستند. به عبارت دیگر با تغییر a و b یعنی با تغییر ابعاد غشاء شما می توانید غشاء را با همان فرکانس $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ به ارتعاش در آورید ولی خطوط گره (nodal lines) آن تغییر نماید.

شکل زیر خطوط گره را برای یک غشاء مربعی که در آن a=b=1 است نشان می دهد. لازم است دانشجویان گرامی مسأله را برای یک غشای مربعی حل کنند و به مفاهیم خطوط گره پی ببرند:



مرحله سوم:

در این مرحله دنبال جواب کلی $u(x,y,t)$ خواهیم بود بشکلی که شرائط اولیه گفته شده را ارضاء نماید:

$$\text{شرایط اولیه}\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) = & \text{جابجایی اولیه غشاء} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y) = & \text{سرعت اولیه نوسانی غشاء} \end{cases}$$

پس:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}$$

با توجه به شرائط اولیه خواهیم داشت:

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)$$

رابطه بالا به **سری فوریه دوبل** موسوم است.
برای پیدا کردن B_{mn} به عملیات زیر دقت کنید:

اگر

$$k_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow\ f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} k_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

چنانچه رابطه بالا را برای yها ثابت و به عنوان تابعی از x در نظر بگیریم مطابق قاعده پیدا کردن ضرائب بسط فوریه می توان نوشت:

$$k_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

علاوه بر آن اگر به رابطه $k_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$ دقت کنیم ملاحظه می کنیم که این عبارت نشان میدهد که $k_m(y)$ یک بسط فوریه سینوسی داده شده است پس:

$$B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b k_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

پس:

$$\Rightarrow B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\ \int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

عبارت بالا که نشان دهنده ضرائب بسط فوریه تابع $f(x,y)$ است را رابطه **تعمیم یافته اولر** می گویند.

در پایان برای تعیین ضرائب B^*_{mn} باید از شرط اولیه بعدی که مشخص کننده سرعت اولیه حرکت نوسانی غشاء است استفاده کرد.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty} B^*_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)$$

و بهمان ترتیب داریم:

$$B^*_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\ \int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

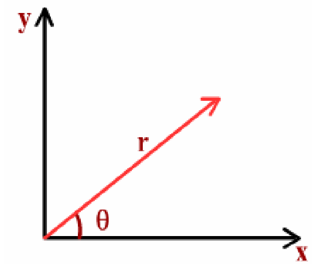
دانشجویان محترم می توانید محاسبه B^*_{mn} را برای ممارست بیشتر انجام دهید.

7- لاپلاس در مختصات قطبي

در اين قسمت لاپلاسي يك تابع را كه قبلاً در مختصات دكارتي نوشته بوديم به مختصات قطبي مي بريم فايده اين كار آن است كه در بعضي از مسائل مهندسي تقارن مسأله بگونه اي است كه كار در مختصات قطبي بسيار آسانتر انجام مي گيرد.

در مختصات قطبي كه داراي دو مختصه r و φ هستند داريم:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$



براي تبديل لاپلاسي يك تابع از دستگاه دكارتي به دستگاه قطبي بايد عبارات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را در دستگاه قطبي بسازيم. توجه به اين قسمت حائز اهميت است چون اين كار مي تواند براي تبديل لاپلاسي يك تابع از دستگاه دكارتي به هر دستگاه ديگري بكار رود.

(مشتق زنجيره اي)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{u_x} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{u_r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{r_x} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \theta}}_{u_\theta}\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x}}_{\theta_x}$$

$$\Rightarrow \qquad u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_r r_x) + \frac{\partial}{\partial x}(u_\theta \theta_x)$$

$$\Rightarrow u_{xx} = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}$$

حال با استفاده دوباره از مشتق زنجيره اي داريم:

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x \qquad , \qquad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x$$

خوب حالا بايد $r_x = \frac{\partial r}{\partial x}, \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ را حساب كنيم. براي اينكار به عبارات زير توجه مي كنيم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad , \theta = are \ \tan {}^{y}\!/_{x}$$

(به شكل مختصات قطبي دقت شود)

پس

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\theta_x = \frac{1}{1 + \left({}^{y}\!/_{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{r^2}$$

بهمین ترتیب داریم:

$$r_{xx} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial r_x}{\partial x} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$\theta_{xx} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -y\left(\frac{-2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

با در نظر گرفتن اینکه $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ و با جایگزین تمام روابط بالا در معادله لاپلاسي خواهیم داشت:

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta$$

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2\frac{xy}{r^4} u_\theta$$

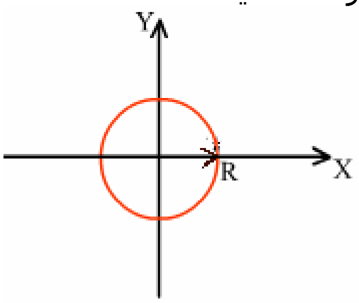
$$\Rightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

شکل لاپلاسي در دستگاه مختصات قطبي

8- غشاي دايروي

معادله بسل

در اين بخش با بكارگيري مختصات قطبي ارتعاشات يك غشاي دايروي به شعاع R را مورد بررسي قرار مي دهيم. به شكل زير نگاه كنيد.



با استفاده از مختصات قطبي شكل $\begin{cases} x = r\,cn\,\theta \\ y = r\tan\theta \end{cases}$ معادله برج بصورت زير خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

در اينجا حالتي را در نظر مي گيريم كه در آن جواب به شكل u(r ,t) است و تشيبه به θ نداشته باشد به عبارت ديگر ميزان انحراف غشا نسبت بهr متقارن است پس داريم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

لازم است در انيجا شرايط مرزي و ارايه را نيز مشخص كنيم.

براي همه ي زمانها $U(R,t) = 0$ شرط مرزي (چون مرزهاي غشا ثابت و محكم نگهداشته شده است)

$$\begin{cases} U(r,\ 0) = f(r) = \text{انحراف اوليه غشا} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = g(r) = \text{سرعت اوليه غشا} \end{cases}$$

مرحله اول

در اين مرحله جواب معادله موج را با روش جداسازي متغيرها بدست مي آوريم:

$$u(r_1 t) = W(r)\ G(t)$$

با مشتق گيري و جاگذاري حاصل در معادله موج مطابق آنچه در بخش هاي گذشته انجام شد داريم:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right) = -k^2$$

كه نمادهاي زير در آن بكار رفته است:

$$\ddot{G} = \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} \qquad , \quad W'' = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$$

با بكار گيري ثابت $-k^2$ كار را دنبال مي كنيم:

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad (\lambda = ck)$$

$$W'' + \frac{1}{r}W' + k^2 W = 0$$

مرحله دوم

در این مرحله معادله بر حسب w را حل می کنیم. برای اینکار بهتر است متغیرهای جدید زیر را برای آسانی کار بکار گیریم.

$$S = kr \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{s}$$

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{dw}{ds}k$$

$$w'' = \frac{d^2w}{ds^2}k^2$$

و در نهایت با جایگذاری دو عبارت بالا در معادله دیفرانسیل مربوطه داریم.

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dw}{ds} + w = 0$$

این معادله که به معادله بسل موسوم است معادله معروفی است که جوابهای مشخصی دارد. معادله بسل در فصلهای آینده بطور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت ولی فعلا برای آشنائی بیشتر با این معادله دیفرانسیل فرم کلی آنرا ذکر می کنیم فرم کلی معادله بسل عبارتست از:

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + (1 - \nu^2)W = 0$$

که در آن پارامتر ν یک عددداده شده است. به این ترتیب ملاحظه میشود که در معادله A , $\nu = 0$ است. بهمین دلیل جوابهای معادله را به شکل J_0 و Y_0 نشان می دهند. J_0 و Y_0 را توابع بسل از نوع اول و نوع دوم می نامند. پس جواب معادله دیفرانسیل بر حسب W عبارتست از:

$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

اگر به رفتار تابع بسل نوع دوم $y_0(s) = y_0(kr)$ توجه کنیم (این رفتار در کتب ریاضی آمده است) ملاحظه میشود که y_0 با افزایش s بسمت بی نهایت می رود در حالیکه انحراف غشا همیشه یک انحراف محدود و متناهی است پس با این استدلال میتوان نتیجه گرفت که جواب $y_0(s)$ جواب فیزیکی نیست و لذا $c_2 = 0$ به این ترتیب جواب منحصر به تابع بسل نوع اول میشود یعنی:

$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr)$$

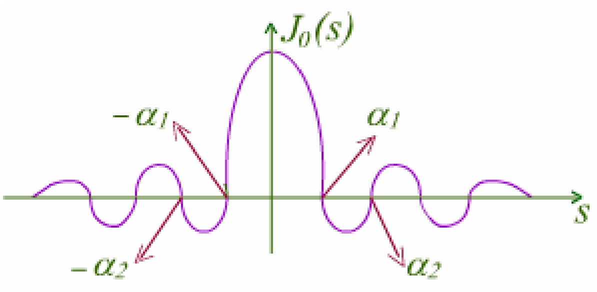
که در آن c_1 را نیز بطور دلخواه عدد 1 انتخاب کرده ایم.

حال شرط مرزی را اعمال می کنیم:

$$u(R,t) = W(R)G(t) = 0 \qquad at \qquad r = R$$

$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

معادله B نشان میدهد که صفرهای تابع بسل حاصل اعمال شرط مرزی است. می دانیم که تابع بسل در بعضی از مقادیر S صفر میشود این مقادیربه صفرهای تابع بسل موسوم هستند. شکل زیر تابع بسل و صفرهای آنرا نشان میدهد.



α_1 ، α_2 و .... صفرهای تابع بسل هستند که در نقاط مختلف زیر اتفاق می افتند:

$\alpha_1 = 2.4048$ $\qquad \alpha_2 = 5.5201$ $\qquad \alpha_3 = 8.6537$

$\alpha_4 = 11.7915$ $\qquad \alpha_5 = 14.9309$

پس با استفاده از صفرهای تابع بسل میتوان معادله B را اینگونه در نظر داشت.

$$kR = \alpha_m = \text{صفرهای تابع بسل} \quad \Rightarrow k = k_m = \frac{\alpha_m}{R} \quad m = 1,2,.......$$

$$\Rightarrow w_m(r) = J_0(k_m r) = J_0(\frac{\alpha_m}{R} r)$$

این جواب معادله دیفرانسیل بر حسب w است که در $r = R$ صفر میشود. با $\lambda = \lambda_m = ck_m$ دارای جوابهایی است که عبارتند از:

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t$$

$$\Rightarrow u_m(r\ t) = w_m(r) G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0(k_m r$$

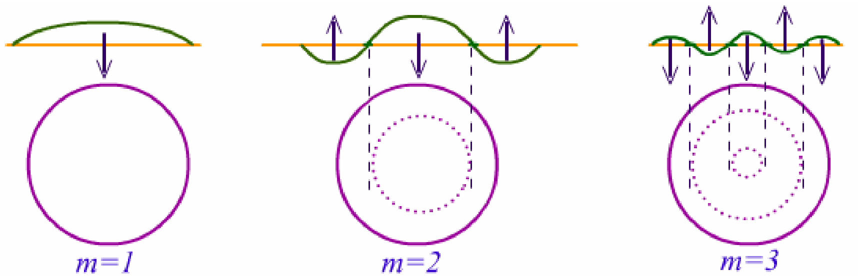
جوابهای $u_m(r_1 t)$ توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_m هستند.

در اینجا به چند نکته مهم و کاربردی توجه کنید:

1) ارتفاعات غشای دایره ئی که با u_m نشان داده میشود را وجه ارتعاشی طبیعی m ام می گویند. این وجه ارتعاشی دارای فرکانس $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ است.

2) صفرهای تابع بسل (J_0) روی محور افقی با فواصل مساوی توزیع نشده اند در حالیکه صفرهای توابع سینوسی که در مورد ارتعاشات یک سیستم دیدیم روی محور افقی دارای فواصل مساوی هستند بهمین دلیل صدای ناشی از زدن روی یک غشای دایره یی با صدای ناشی از ارتعاشات یک سیستم کاملا متفاوت است. به عبارت دیگر صدای یک تنبک دایره یی با صدای ویلون تفاوت فاحشی دارد.

3) شکلهای زیر تصویر وجوه طبیعی را برای $m = 3, m = 2, m = 1$ نشان میدهد:



الف) برای $m=1$ کلیه نقاط غشا با هم بطرف بالا (یا پایین) می روند.

ب) برای $m=2$ وضعیت مطابق توضیح زیر است:

تابع $w_2(r)=J_0(\frac{\alpha_2 R}{R}r)$ در $\frac{\alpha_2}{R}r=\alpha_1$ صفر میشود (تعریف صفر بسل) به عبارت دیگر دایره هائی که به شعاع $r=\frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ روی غشا دوایر گره هستند یعنی اگر در یک زمان مشخص قسمت مرکزی غشا که با شعاع r مشخص میشود بسمت بالا حرکت کند سایر قسمتها برای $r>\frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ بسمت پایین حرکت می کنند و برعکس .

این مطلب را برای $m=3$ امتحان کنید.

4) جواب $u_m(r,t)$ دارای $m-1$ تا گره است که گره ها دوایر متحد المرکز هستند.

مر حله سوم:

برای بدست آوردن جوابی که شرایط اولیه را نیز ارضا نماید، میتوان از همان روش ارتعاشات سیم استفاده کرد.

سری زیر را در نظر بگیرید. این سری جمع کلیه $u_m(r,t)$ ها است:

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty} w_m(r)\cos_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m G_n \lambda_m t+b_m \sin\lambda_m t)J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)$$

در $t=0$ ، $u(r,0)=f(r)$

$$u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)=f(r)$$

اینجا نیز ملاحظه میشود که a_mها ضرائب فوریه بسل تلقی میشوند یعنی عبارت بالا نشان میدهد که $f(r)$ بر حسب توابع بسل بسط داده شده است.

$$a_m=\frac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_m)}\int_0^R r\,f(r)\,J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)dr$$

$$m=1,2,......$$

حال میتوان با استفاده از اولین شرط یعنی $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r0$ ضرائب b_m در عبارت $u(r,t)$ بالا را بدست آورد.

در عبارت a_m تابع $J_1(\alpha_m)$ تابع بسل نوع اول از مرتبه 1 است.

9- لاپلاسي در دستگاه مختصات استوانه اي و کروي

با توجه به درسهاي قبلي که لاپلاسي در دستگاه مختصات قطبي را نشان داديم حال با استفاده از همان لاپلاسي در دستگاه قطبي به لاپلاسي در دستگاه استوانه اي و کروي مي رسيم:

قطبي : $\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta^2}$

می دانيد که در دستگاه استوانه اي مختصه z نيز وجود دارد پس:

استوانه اي: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

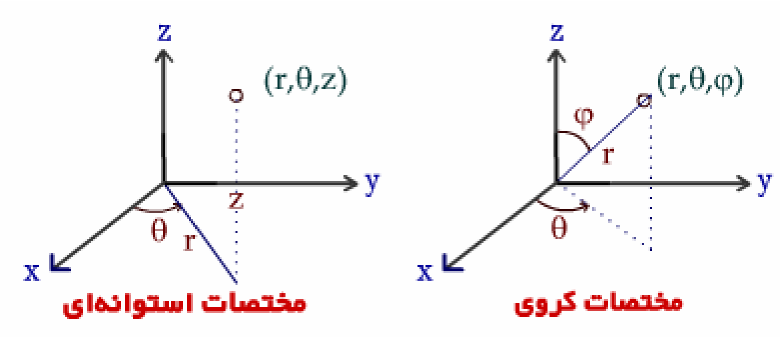
حال با توجه به مختصات کروي که درآن:

$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

مي توان لاپلاسي تابع u را در مختصات کروي بشکل زير نوشت:

کروي: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

شکل زير مختصات استوانه اي و کروي را براي يادآوري نشان مي دهد.



لاپلاسي در دستگاه کروي بشکل زير نيز نوشته مي شود:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

10- معادله لاپلاسي در دستگاه كروي ـ معادله لژاندر

براي بدست آوردن معادله لژاندر به مثال زير توجه كنيد:

فرض كنيد كره S به شعاع R در يك پتانسيل الكتريكي $f(\varphi)$ قرار گرفته باشد مي خواهيم پتانسيل الكتريكي u را در كليه نقاط فضا پيدا كنيم. چنانچه به درسهاي قبل نگاه كنيد براي پيدا كردن پتانسيل u بايد معادله لاپلاس را در دستگاه كروي حل كنيد:

$\nabla^2 u = 0$ تمام نقاط فضا به غير از كره S

$u(R,\theta,\varphi) = f(\varphi)$ با شرط

با توجه به اينكه پتانسيل روي كره S مستقل از θ است. مي توان گفت كه پتانسيل مزبور در بقيه نقاط فضا نيز مستقل از θ است پس در معادله لاپلاسي عبارت $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ است پس:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}) = 0$$

همچنين داريم:

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} u(r,\varphi) = 0$$

يعني در بي نهايت پتانسيل برابر صفر است.

حال در اينجا با توجه به شرايط مرزي گفته شده معادله $\nabla^2 u = 0$ را حل مي كنيم.

$$U(r,\varphi) = G(r)H(\varphi)$$

با جايگذاري عبارت بالا كه با توجه به روش جداسازي متغيرها نوشته شده است. در معادله ديفرانسيل بالا خواهيم داشت.

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dG}{dr}) = -\frac{1}{H\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi \frac{dH}{d\varphi})$$

باقرار دادن طرف راست و طرف چپ عبارت بالا برابر با عدد ثابت k خواهيم داشت:

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi \frac{dH}{d\varphi}) + kH = 0$$

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dG}{dr}) = k$$

معادله ديفرانسيل بر حسب G مي تواند شكل زير نوشته شود:

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0$$

اين معادله به معادله كوشي موسوم است و با توجه به درس معادلات ديفرانسيل مي دانيم كه جواب آن بشكل $G = r^{\propto}$ خواهد بود.

معمول است كه ثابت k را بشكل n(n+1) نشان مي دهند. ببينيم با اين جايگذاري معادله ديفرانسيل بر حسب G به چه شكلي در مي آيد:

$$r^2 G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0$$

اگر $G = r^{\propto}$ را در عبارت بالا جايگذاري كنيم داريم:

$$\left[\propto(\propto - 1) + 2\propto - n(n+1)\right] r^{\propto} = 0$$

اين معادله جبري در $\propto = n$, $\propto = -n-1$ صفر مي شود. پس مي توان نوشت.

$$G_n(r) = r^n \qquad , \qquad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

خوب حال كه k را برابر با n(n+1) گرفتيم اجازه دهيد همين عبارت را در معادله ديفرانسيل بر حسب H نيز بكار گيريم و در ضمن نيز براي راحتي $\cos\varphi = w$ در نظر بگيريم:

$$\cos\varphi = w \Rightarrow \sin^2\varphi = 1 - w^2$$

پس

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\varphi} = -\sin\varphi \frac{d}{dw}$$

پس با جايگذاري عبارات بالا در معادله ديفرانسيل بر حسب H داريم:

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dH}{dw}\right] + n(n+1)H = 0$$

يا

$$(1-w^2)\frac{d^2H}{dw^2} - 2w\frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0$$

معادله بالا به معادله لژاندر موسوم است و چنانچه مي دانيد جوابهاي اين معادله را بشكل $P_n(w)$ نشان مي دهند يعني:

$$H = P_n(w) = P_n(\cos\varphi)$$

پس با توجه به جواب G و H مي توان $U_n(r,\varphi)$ يعني پتانسيل الكتريكي را نوشت:

$$U_n(r,\varphi) = A_n r^n P_n(\cos\varphi)$$

$$U_n^*(r,\varphi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\varphi)$$

حال براي بدست آوردن جواب عمومي يعني $U_n(r,\varphi)$ مطابق گذشته عمل مي كنيم يعني:

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi)$$

$$U(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\varphi) = f(\varphi)$$

رابطه بالا نيز مانند آن است كه $f(\varphi)$ بر حسب توابع لژاندر بسط داده شده است پس:

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(W)P_n(W)dW$$

در انتگرال بالا $f(W)$ همان $f(\varphi)$ است كه در آن $W = \cos\varphi$ است.

چون $dW = -\sin\varphi\, d\varphi$ و حدود انتگرال نيز متناظر با $\varphi = \pi$, $\varphi = 0$ است پس بنا توجه به:

$$\cos\pi = -1$$

$$\cos 0 = 1$$

داريم:

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\varphi)p_n(\cos\phi)\,\sin\varphi\, d\,\varphi \qquad n = 0,1,\ldots$$

پس سري ذكر شده با ضرائب بالا جواب مسأله براي نقاط داخل كره است براي پيدا كردن جواب در خارج از كره نمي توان از $u_n(r,\varphi)$ استفاده كرد چون اين جواب شرط $\lim\limits_{r \to \infty} u(r,\varphi)=0$ را ارضا نمي كند پس از جواب $u_n^*(r,\varphi)$ استفاده مي كنيم پس:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\varphi)$$

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^{\pi} f(\varphi) P_n(\cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$$