

## فصل اول

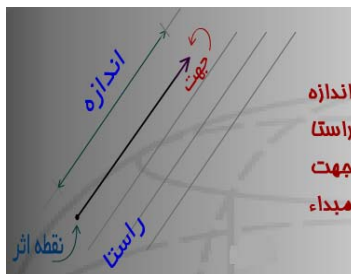
### ریاضیات برداری

#### بردارها و اسکالرها

اصولاً کمیت‌های فیزیکی از نظر معرفی و معین شدن در دو دسته قرار می‌گیرند: اسکالر و بردار

**اسکالر Scalar:** به کمیت‌هایی اطلاق می‌شوند که تنها توسط یک عدد که همان اندازه آن کمیت باشد مشخص می‌شوند مانند جرم، انرژی و بار الکتریکی

**بردار vector:** کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نیز نیازمند هستند مانند نیرو، شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان حجمی الکتریکی منظور از جهت در این کلام، معلوم بودن راستا یا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روی این راستا می‌باشد. مانند شکل روبرو.



شکل ۱

عموماً بمنظور تفکیک نمودن کمیت‌های اسکالر و برداری از یکدیگر بصورت پارامتری و نمادی بطریق زیر عمل می‌شود: کمیت‌های اسکالر با حروف کوچک و کمیت‌های برداری با حروف بزرگ توأم با علائمی در بالای آنها مانند:

$$\begin{array}{ll} \text{اسکالر} & a, b, c, m, n, \dots \\ \text{بردار} & \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{F}, A, B, E \end{array}$$

برای نمایش اندازه یک بردار یا حرف مربوطه را بدون علائم بردار بکار می‌رود و یا از علامت قدر مطلق مانند:

$$\vec{F} \text{ اندازه بردار } = F = |\vec{F}|$$

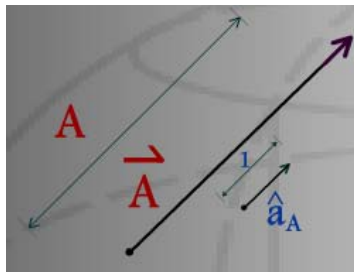
#### بردار یکان: unit vector

بردار واحد یا بردار یکان یک بردار عبارتست از برداری با اندازه واحد و همجهت با بردار مربوطه برای نمایش این بردار عموماً از حروف  $a$ ، همراه با علامت  $\hat{}$  بر روی آن استفاده می‌شود. همچنین برای مشخص‌تر شدن آن از یک اندیس مشابه با اسم بردار اصلی به‌همراه حروف  $u$  و  $a$  نیز استفاده بعمل می‌آید

$$\vec{A} \text{ بردار واحد بردار } = \hat{u}_A = \hat{a}_A$$

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

بنابراین



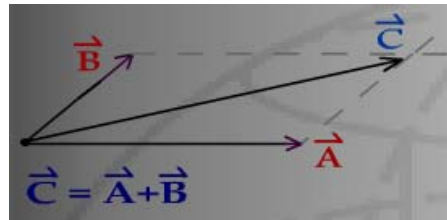
شکل ۲

### جبر بردارها vector Algebra

چهار عمل اصلی در ریاضیات برداری بصورت زیر تعریف می‌شوند:

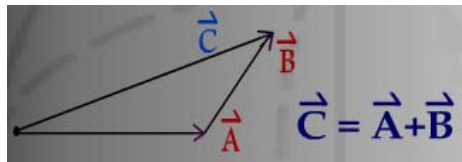
#### - جمع بردارها:

از نظر گرافیکی (هندسی) جمع چند بردار به دو روش انجام می‌گیرد: روش اول تشکیل متوازی‌الاضلاع است.

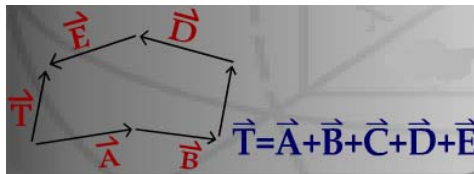


شکل ۳

روش دوم روش چند ضلعی یا روش سرپه‌دم است.



شکل ۴



شکل ۵

از نظر تحلیلی جمع دو بردار پس از تجزیه آن‌دو به مؤلفه‌های هم جهت، می‌توان با جمع جبری مؤلفه‌های هم جهت دو بردار عمل جمع را انجام داد.

$$\vec{A} + \vec{B} = ?$$

$$\vec{A} = A_1\hat{a}_1 + A_2\hat{a}_2 + A_3\hat{a}_3$$

$$\vec{B} = B_1\hat{a}_1 + B_2\hat{a}_2 + B_3\hat{a}_3$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1)\hat{a}_1 + (A_2 + B_2)\hat{a}_2 + (A_3 + B_3)\hat{a}_3$$

در جمع بردارها خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری صادق هستند.

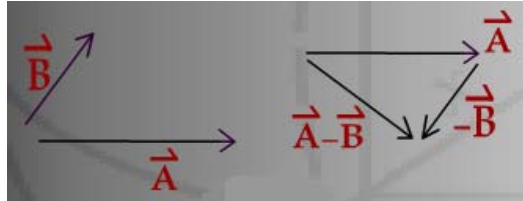
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

### - تفریق بردارها

در این عمل بردار  $\vec{A}$  را با معکوس شده بردار  $\vec{B}$  جمع می‌شود

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



شکل ۶

### ضرب بردارها

#### الف- ضرب دو بردار:

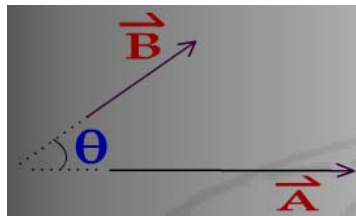
۱ - ضرب داخلی دو بردار

نتیجه ضرب داخلی دو بردار یک اسکالر می‌باشد، مانند:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

[ $\theta$  کوچکترین زاویه بین دو بردار است]

بهمین دلیل این نوع ضرب را ضرب اسکالر نیز گفته می‌شود. همچنین چون در نمایش این ضرب از علامت نقطه بعنوان عملیات ضرب استفاده می‌شود، به آن ضرب نقطه‌ای نیز گفته شده است. Scalar product , Dot product



شکل ۷

از خواص این نوع ضرب جابجایی و توزیع‌پذیری است.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$$

مهم‌ترین کاربرد این ضرب یافتن مؤلفه یا تصویر یک بردار در جهت (راستا) خاصی است: کافی است بردار واحد آن جهت خاص را در بردار مذکور ضرب داخلی کرد.

#### مثال:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

با توجه به عمود بودن بردارهای واحد سه جهت  $z, y, x$  بر هم داریم:

$$\vec{A} \cdot \hat{a}_x = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_x + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = (A_x \times 1) + (A_y \times 0) + (A_z \times 0) = A_x$$

$$A_y = \hat{a}_y \cdot \vec{A} \quad , \quad A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A}$$

همچنین:

و یا بطور کلی: مؤلفه بردار  $\vec{A}$  در جهت و راستای بردار  $\vec{B}$ :  $A_B = \hat{a}_B \cdot \vec{A}$   
 بنابراین واضح است که:  $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos 0^\circ$

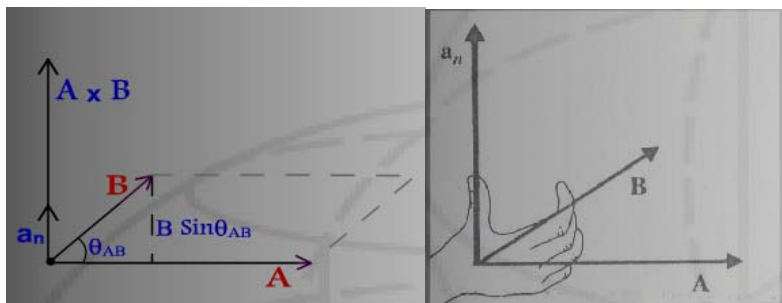
۲- ضرب خارجی

نتیجه این ضرب یک بردار است و چون در نمایش آن از علامت کراس X استفاده می‌شود به آن ضرب کراس نیز گفته می‌شود Cross product

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = |\vec{C}| = AB \sin \theta_{AB}$$

$\theta_{AB}$  کوچکترین زاویه بین  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  است که بردار  $\vec{A}$  را در امتداد بردار  $\vec{B}$  قرار می‌دهد.  
 جهت بردار  $\vec{C}$  بر دو بردار  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  عمود است و طبق قانون دست راست بدست می‌آید.



شکل ۸

واضح است که:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{A} \times \vec{B}$$

همچنین خاصیت توزیع پذیری در ضرب خارجی وجود دارد:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

**ب- ضرب یک اسکالر در یک بردار**

این ضرب بصورت روبرو نمایش داده می‌شود:  $m\vec{A} = mA\hat{a}_A$

نتیجه این ضرب بردار است با اندازه m برابر  $\vec{A}$  و چنانچه m مثبت باشد بردار نهایی هم جهت و در غیر اینصورت در خلاف جهت بردار  $\vec{A}$  خواهد بود.

**تقسیم:** نها تعریفی که در مورد تقسیم در مبحث بردارها وجود دارد تقسیم یک بردار بر یک

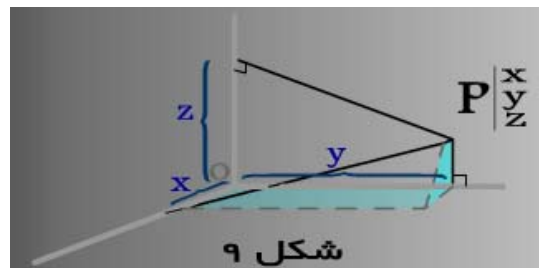
اسکالر است که همان مفهوم ضرب یک اسکالر در بردار را دارد:  $\frac{\vec{A}}{m} = \frac{1}{m} \vec{A} = \frac{A}{m} \hat{a}_A$

### دستگاه‌های مختصات متعامد Orthogonal coordinate systems

در این درس سه دستگاه مختصات سه بعدی که سه جهت آن بر هم عمود هستند را مورد بررسی و استفاده قرار می‌گیرد.

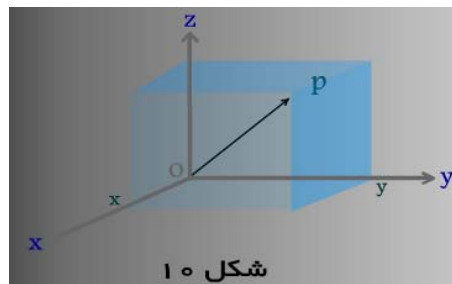
#### ۱ - دستگاه مختصات مستطیلی Rectangular coordinates

بدلیل آنکه با تشکیل یک مکعب مستطیل می‌توان این دستگاه را برپا کرده و موقعیت نقطه یا مکانی را مشخص نمود، مختصات مستطیلی به آن اطلاق می‌شود. از دیگر نام‌های این دستگاه دکارتی و کارتزین Cartesian است.



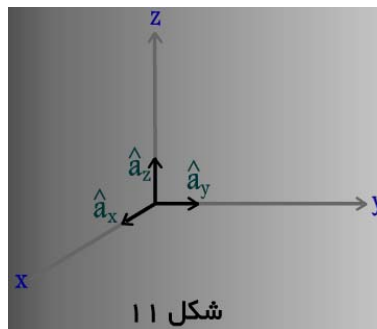
شکل ۹

در این دستگاه با سه پارامتر  $x$  و  $y$  و  $z$  موقعیت یک نقطه روشن می‌گردد. سه محور مربوطه در نقطه مبدأ مختصات بر هم عموداند. بنابراین برای یافتن مکان هر نقطه و یا انتهای هر بردار کافی است که از آن نقطه بر سه محور عمود کرد. بعنوان مثال نقطه  $P$  را در تصویر مشاهده می‌کنید. در واقع این خطوط عمود، قطرهای سه وجه از یک مکعب مستطیل است که مبدأ مختصات  $(O)$  و نقطه  $P$  در ابتدا و انتهای قطر اصلی (بزرگ) آن واقع شده است.



شکل ۱۰

بردارهای یکان سه جهت عبارتند از  $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$  و هر کدام با اندازه واحد و در جهت مثبت سه محور  $x, y, z$  و منطبق با سه محور فوق خواهند بود. که بنابراین بر هم عمودند. پس:



شکل ۱۱

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

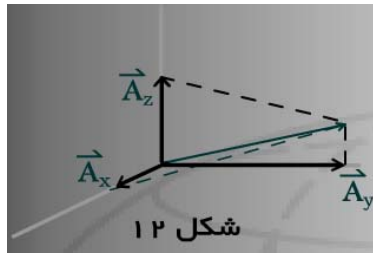
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z, \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x, \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

نمایش یک بردار در فضای مختصات مسطیلی بصورت تحلیلی:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

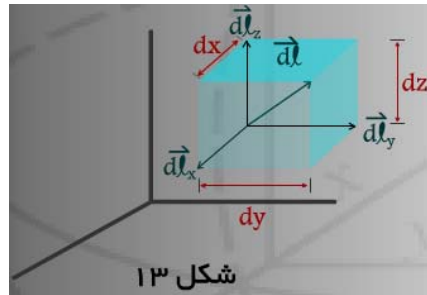
$A_x, A_y, A_z$  بترتیب مؤلفه (تصویر) بردار  $\vec{A}$  در سه جهت  $x$  و  $y$  و  $z$  می‌باشند.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



شکل ۱۲

برای یک شکل کوچک دیفرانسیلی با ابعاد  $d_x, d_y, d_z$  می‌توان بردار دیفرانسیلی طولی بقرار زیر تعریف نمود.



شکل ۱۳

$$d\vec{l} = d\vec{l}_x + d\vec{l}_y + d\vec{l}_z$$

$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x, \quad dl_x = dx$$

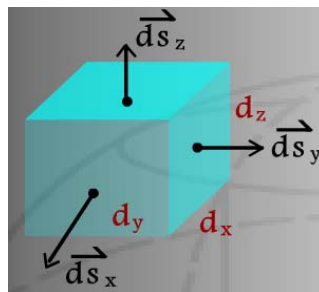
$$d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y, \quad dl_y = dy$$

$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z, \quad dl_z = dz$$

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

بنابراین:

با تعریف بردار نرمال (عمود) بر یک سطح که عبارتست از برداری که بر سطح مورد نظر عمود بوده در جهت خارج از سطح است و اندازه آن برابر مساحت آن سطح می‌باشد، می‌توان سه بردار نرمال به سطح با توجه به شکل دیفرانسیلی قبل ارائه کرد.



شکل ۱۴

$$d\vec{s} = d\vec{s}_x + d\vec{s}_y + d\vec{s}_z$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz, \quad ds_x = dydz$$

$$d\vec{s}_y = \hat{a}_y dx dz, \quad ds_y = dx dz$$

$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z dx dy, \quad ds_z = dx dy$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dx dz + \hat{a}_z dx dy$$

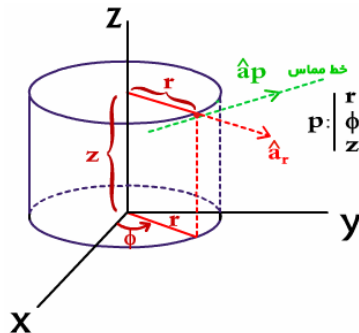
بنابراین:

آخرین ترم دیفرانسیلی یک کمیت اسکالر است دیفرانسیل حجم می‌باشد:  $dv = dx dy dz$

برای مقادیر ثابت  $x$  یا  $y$  یا  $z$ ، مکان‌های هندسی بوجود می‌آید که متشکل از صفحات مسطح و بینهایت عمود بر سه محور  $x, y, z$  خواهد بود.

## ۲- دستگاه مختصات استوانه‌ای Cylindrical coordinates

این دستگاه مختصات سه بعدی بطریقی تعریف می‌شود که با برپائی یک شکل استوانه‌ای سه پارامتر نشان دهنده موقعیت یک نقطه را براحتی میسر می‌کند و بهمین دلیل نام استوانه‌ای به این دستگاه اطلاق شده است.



شکل ۱۵

سه پارامتر این دستگاه  $z, \phi, r$  است.

$r$  فاصله عمودی از محور  $z$  هاست.

$\phi$  زاویه‌ای است که تصویر  $r$  بر روی صفحه افق  $(xy)$  با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد.

$z$  همان کمیت (پارامتر) سوم مختصات مستطیلی است.

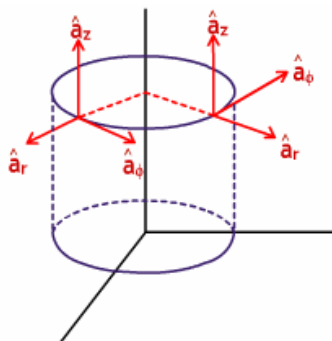
بنابراین می‌توان استوانه‌ای تصور و رسم نمود که شعاع قاعده آن  $r$  محور استوانه محور  $z$ ها قاعده بالای آن در موقعیت  $z=z$  قاعده پائین استوانه در سطح افقی واقع شده است و نقطه  $P$  روی لبه آن استوانه مستقر می‌شود (ارتفاع استوانه برابر با  $z$  با پارامتر سوم مختصات نقطه  $P$  می‌باشد) محدوده  $z, \phi, r$  با توجه به تعریف انجام شده:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

برای یافتن بردارهای واحد سه جهت مربوطه یعنی بترتیب  $\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z$  کافی است در نقطه  $P$  در امتداد شعاع  $r$  در جهت دور شدن از محور  $z$  به اندازه واحد، بردار  $\hat{a}_r$  را بدست آورید.

اگر بر سطح استوانه و در نقطه  $P$  مماسی رسم گردد، امتداد این مماس راستای  $\hat{a}_\phi$  خواهد بود و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از جهت مثبت محور  $x$  هاست. بنابراین واضح است که  $\hat{a}_\phi, \hat{a}_r$  بر خلاف بردارهای واحد مختصات مستطیلی وابسته به مکان خواهند بود.

$\hat{a}_z$  مشابه دستگاه مختصات مستطیلی تعریف می‌شود.



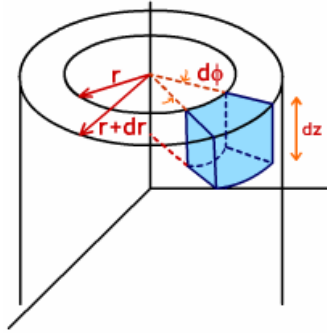
شکل ۱۶

مشابه مختصات مستطیلی در این مختصات داریم:

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$$

برای تعریف بردارهای دیفرانسیلی طولی و سطحی بایستی قسمتی از فضای بین دو استوانه هم محور با اختلاف شعاع قاعده برابر با  $dr$  را در نظر گرفت این حجم دیفرانسیلی که دارای ارتفاعی برابر با  $dz$  است در دهانه  $d\phi$  واقع می‌شود.



شکل ۱۷

بنابراین بردار دیفرانسیل طولی:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\phi + d\vec{l}_z$$

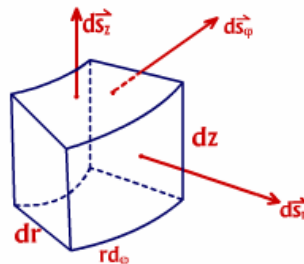
$$d\vec{l}_r = dr \hat{a}_r, \quad dl_r = dr$$

$$d\vec{l}_\phi = r d\phi \hat{a}_\phi, \quad dl_\phi = r d\phi$$

$$d\vec{l}_z = dz \hat{a}_z, \quad dl_z = dz$$

توجه داریم که چون  $d\phi$  اندازه یک زاویه (برحسب رادیان) است نمی‌تواند بعنوان طول در نظر گرفته شود. بنابراین با توجه به کمان روبرو به زاویه  $d\phi$  از شعاع دایره  $r$  آنرا به طول تبدیل کرده‌ایم.

**بردارهای دیفرانسیلی سطحی**



شکل ۱۸

$$d\vec{s} = d\vec{s}_r + d\vec{s}_\phi + d\vec{s}_z$$

$$d\vec{s}_r = \hat{a}_r r d\phi dz, \quad ds_r = r d\phi \times dz$$

$$d\vec{s}_\phi = \hat{a}_\phi dr dz, \quad ds_\phi = dr \times dz$$

$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z r dr d\phi, \quad ds_z = r d\phi \times dr$$



برای کمیت اسکالر دیفرانسیلی حجم در این مختصات  $dv = r dr d\phi dz$  که از ضرب سه بعد شکل دیفرانسیلی فوق یعنی  $dr$  و  $r d\phi$  و  $dz$  بدست آمده است.

همچنین در خصوص ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارهای یکان این دستگاه با توجه به متعامد بودن سه جهت:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$$

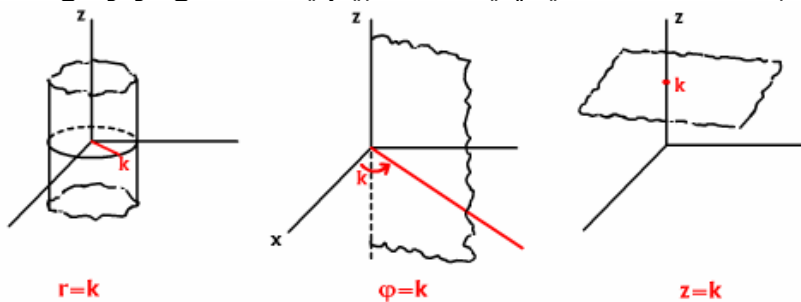
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z, \quad \hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r, \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi$$

در این مختصات برای پارامترهای ثابت مکان هندسی خاصی را حاصل می‌کند که بقرار زیر است:

برای  $r=k$ : سطح جانبی یک استوانه نامحدود با محوریت محور  $z$ ها خواهد بود که شعاع قاعده آن  $k$  می‌باشد.

برای  $\phi=k$ : یک نیم صفحه بینهایت، مسطح و محدود به محور  $z$ هاست که در زاویه  $\phi=k$  قرار گرفته است.

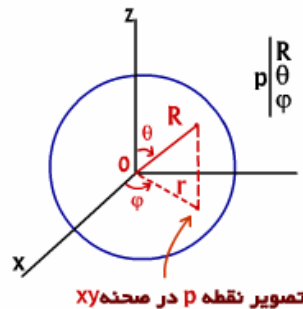
برای  $z=k$ : مشابه مختصات مستطیلی یک صفحه بینهایت، مسطح در ارتفاع  $z=k$  خواهد بود.



شکل ۱۹

## ۲ - دستگاه مختصات کروی Spherical coordinates

این دستگاه در فضای سه بعدی دارای سه پارامتر  $R, \theta, \phi$  است و چون با مرور کردن یک کره به شعاع  $R$  بمرکز مبدأ مختصات از نقطه مورد نظری که می‌خواهیم مختصات آنرا نمایش دهیم تعریف می‌شود بنابراین بنام مختصات کروی موسوم است.



$R$  فاصله نقطه تا مبدأ مختصات است.

$\theta$  زاویه بین  $R$  و جهت مثبت محور  $z$ هاست.

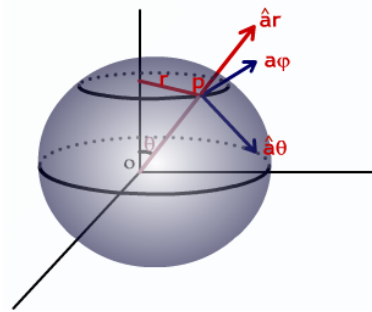
و  $\phi$  همان تعریف در مختصات استوانه‌ای را داراست یعنی از تصویر کردن  $R$  در صفحه  $xy$  به  $r$

رسیده زاویه بین  $r$  و جهت مثبت محور  $x$ ها زاویه  $\phi$  خواهد بود.

بنابراین طبق تعاریف انجام شده محدوده سه پارامتر این مختصات عبارتند از:

$$0 \leq R < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

بردارهای واحد سه جهت تعریف شده بصورت زیر بدست می‌آیند که بر هم عمودند. چنانچه مرکز 0 را به نقطه P متصل نمود ادامه دهیم، امتداد  $\hat{a}_R$  بدست آمده و جهت آن در جهت دور شدن از مرکز خواهد بود. حال اگر بر این امتداد عمودی رسم نمائیم که بر کره به شعاع R مماس بوده و در صفحه‌ای که شامل محور z و خط R باشد، واقع گردد امتداد  $\hat{a}_\theta$  می‌دهد و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از محور +Z است. چنانچه بر سطح کره به شعاع R در نقطه P مماسی بموازات صفحه افق رسم شود  $\hat{a}_\varphi$  را بدست می‌آوریم که جهت مثبت آن در جهت دور شدن از قسمت مثبت محور X هاست.



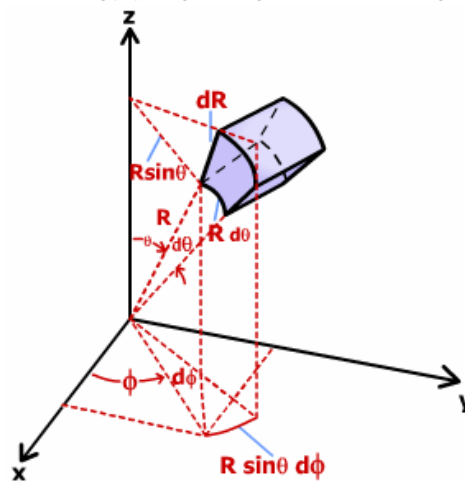
شکل ۲۰

ملاحظه می‌شود که در این دستگاه مختصات هر سه بردار واحد وابسته به مکان خواهد بود یعنی با تغییر نقطه P و یا انتهای هر بردار در این دستگاه بردارهای  $\hat{a}_R, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\varphi$  ممکن است تغییر بنمایند. برای یک بردار مانند بردار  $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}$$

بردارهای دیفرانسیلی طولی و سطحی را می‌توان از حجم دیفرانسیلی که محصور بین دو کره هم مرکز با شعاع‌های R و R+dR است و محدود در زوایای  $d\varphi, d\theta$  می‌باشد بدست آورد.



شکل ۲۱

بنابراین بردار دیفرانسیلی طولی

$$d\vec{l} = d\vec{l}_R + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi$$

$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR, \quad dl_R = dR$$

$$d\vec{l}_\theta = \hat{a}_\theta R d\theta, \quad dl_\theta = R d\theta$$

$$d\vec{l}_\phi = \hat{a}_\phi R \sin\theta d\phi, \quad dl_\phi = R \sin\theta d\phi$$

همچنین بردار دیفرانسیلی نرمال به سطح:

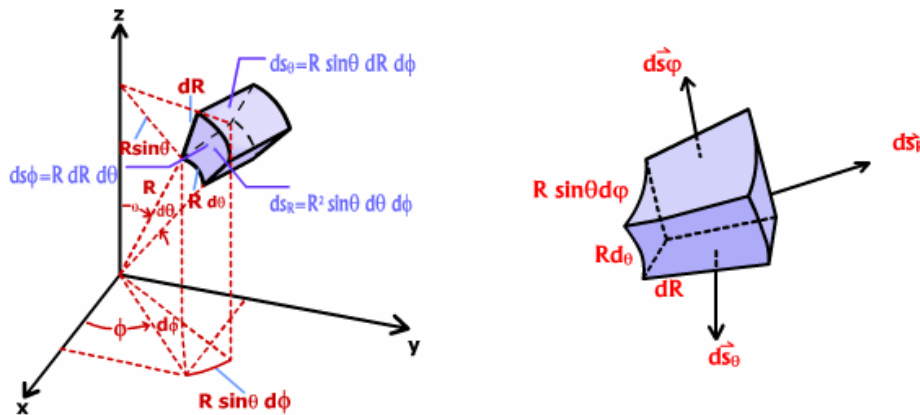
$$d\vec{s} = d\vec{s}_R + d\vec{s}_\theta + d\vec{s}_\phi$$

$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad ds_R = R \sin\theta d\phi \times R d\theta$$

$$d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R \sin\theta dR d\phi, \quad ds_\theta = R \sin\theta d\phi \times dR$$

$$d\vec{s}_\phi = \hat{a}_\phi R dR d\theta, \quad ds_\phi = R d\theta \times dR$$

برای کمیت اسکالر دیفرانسیلی حجم  $dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi$  که از حاصل ضرب سه بعد  $R \sin\theta d\phi, R d\theta, dR$  حاصل شده است.



شکل ۲۲

در این مختصات نیز ضربهای داخلی و خارجی بردارهای واحد سه جهت عمود بر هم بصورت زیر بدست می‌آیند.

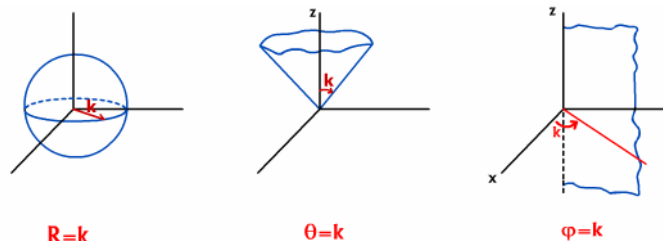
$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1$$

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\phi = 0$$

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi, \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_R, \quad \hat{a}_\phi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

مکان هندسی پارامترهای ثابت در این دستگاه مختصات طبق تعاریف قبلی بصورت زیر بدست می‌آیند.

برای  $R=k$  کره‌ای خواهد بود به شعاع  $k$  بمرکز مبدأ مختصات  
برای  $\theta=k$  مخروط وارونی با زاویه رأس  $K$  واقع در مبدأ مختصات که دارای ابعاد بینهایت است.  
برای  $\phi=k$  مشابه مختصات استوانه‌ای، نیم صفحه بینهایت و محدود به محور  $Z$  هاست که در زاویه  $\phi=k$  قرار گرفته است.



شکل ۲۳

## تبدیل مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به یکدیگر

گاهی اوقات بایستی مختصات نقطه‌ای که در دستگاه مختصات نمایش داده شده است در دستگاه دیگری بیان شود و یا نمایش تحلیلی بردار را در مختصات دیگری ارائه شود که عمده‌ترین علت جمع و یا ترکیب دو برداری است که در دستگاه مختصاتی ارائه شده‌اند که بردارهای واحد آنها تابع مکان هستند یعنی:

$$\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_R, \hat{a}_\theta$$

بنابراین نیازمند تبدیل پارامترها و مؤلفه‌های مختلف در یک دستگاه به دستگاه دیگر است.

## -تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی و برعکس

تبدیل متغیر یا پارامترهای مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

برعکس:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

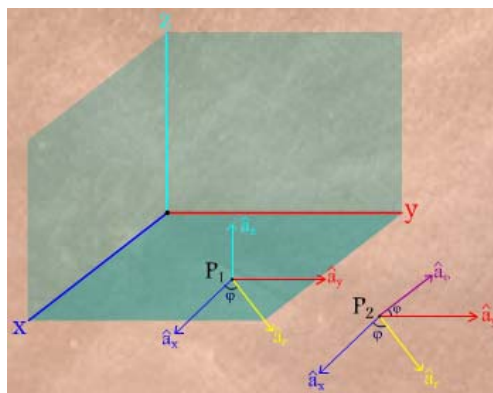
اگر

برای رسیدن به نمایش این بردار در مختصات استوانه‌ای باید  $A_z, A_\phi, A_r$  را بدست آورد.

$$A_r = \hat{a}_r \cdot \vec{A} \quad , \quad A_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \vec{A} \quad , \quad A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A} \quad \text{بنابراین:}$$

$$A_r = \hat{a}_r \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z)$$

$$= A_x \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x + A_y \hat{a}_r \cdot \hat{a}_y + A_z \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z$$



$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = 1 \times 1 \times \cos \varphi$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_y = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x = \cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y = \cos \varphi$$

$$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلی به استوانه‌ای:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

**مثال:** مطلوبست نمایش بردار  $\vec{A}$  در مختصات مستطیلی:

$$\vec{A} = \hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

$$A_r = 3 \cos \varphi, \quad A_\varphi = -2r, \quad A_z = 5$$

بنابراین

**روش اول:**

$$\begin{aligned} A_x &= \hat{a}_x \cdot \vec{A} = \hat{a}_x \cdot (\hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5) \\ &= \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z 5 \\ &= \cos \varphi \times 3 \cos \varphi - (-\sin \varphi) 2r + 0 = 3 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$A_y = \hat{a}_y \cdot \vec{A} = 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2r \cos \varphi$$

$$A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A} = 5$$

سپس پارامترهای موجود در مؤلفه‌های بدست آمده را به مختصات مستطیلی تبدیل می‌کنیم:

$$A_x = 3 \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 2y, \quad A_y = 3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x$$

$$\vec{A} = \hat{a}_x \left( \frac{3x^2}{x^2 + y^2} + 2y \right) + \hat{a}_y \left( \frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x \right) + \hat{a}_z 5$$

بنابراین:

**روش دوم:**

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cos \varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2r \cos \varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

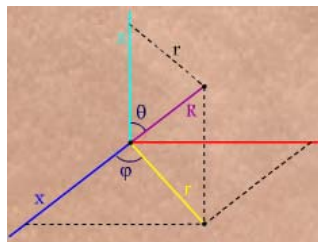
استفاده از ضرب ماتریسی:

که همان نتیجه روش قبل است.

**تمرین:** مطلوبست نمایش بردار مکان  $\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای

**-تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی و برعکس**

تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی



$$x = R \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta$$

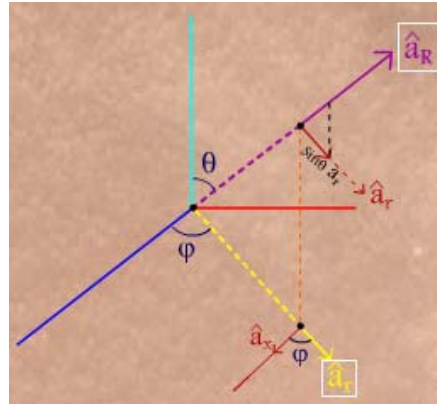
برعکس:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

با توجه به شکل



$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_x = \cos(90 - \theta) \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = \sin \theta \times \cos \varphi$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلی به کروی:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات کروی به مستطیلی:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

**مثال:**

بردار مکان يك نقطه كلي در مختصات کروي را بدست آورید:

$$\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta \\ y \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta$$

$$= R \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R \cos^2 \theta$$

$$= R \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R \cos^2 \theta$$

$$= R \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta$$

$$= R(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = R$$

$$A_\theta = 0, \quad A_\varphi = 0$$

$$\vec{A} = R\hat{a}_R$$

$$\vec{A} = \vec{R}$$

و به همین ترتیب

بنابراین:

و یا

**-تبدیل مختصات کروی به استوانه‌ای و برعکس:**

این تبدیل بندرت استفاده می‌شود:

**تبدیل پارمترها**

$$\begin{cases} r = R \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

**انتگرال گیری**

انتگرال‌هایی که در ارتباط با بردارها می‌باشند عبارتند از:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_v \vec{F} dv$$

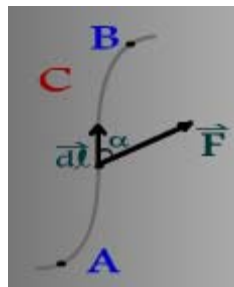
$$\int_c f d\vec{l}$$

$$\int_c f d\vec{l} = \int_c f(\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz) = \hat{a}_x \int_c f(x, y, z) dx + \hat{a}_y \int_c f(x, y, z) dy + \hat{a}_z \int_c f(x, y, z) dz$$

اما مهمترین انتگرال‌گیری، دو انتگرال اول  $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{l}$  و  $\int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$  است که بترتیب بنام انتگرال خطی و

انتگرال سطحی از آن نام می‌بریم.

**انتگرال خطی Line Integral**



بعنوان مثال  $\int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$  روی مسیری مانند C بصورت زیر انجام می‌گیرد.

برای محاسبه آن در هر نقطه، مؤلفه  $\vec{F}$  را که مماس بر منحنی در آن نقطه است  $(F \cos \alpha)$  را بدست آورده در طول  $dl$  ضرب می‌کنیم.

که همان مفهوم  $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  است و نتیجه انتگرال‌گیری تابع اسکالر  $F \cos \alpha dl$  از نقطه A تا B خواهد بود.

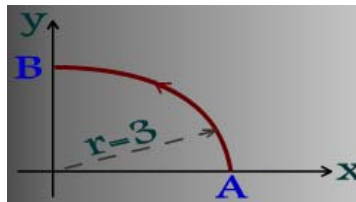
$$\int_A^B F \cos \alpha dl$$

**مفهوم انتگرال خطی:** چنانچه بردار  $\vec{F}$  نیروی وارد بر جسمی باشد، این انتگرال میزان کار لازم برای حرکت جسم روی مسیر C از نقطه A به B می‌باشد که می‌تواند متناسب با انرژی لازم برای عملیات فوق باشد.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

**مثال:** برای بردار داده شده  $\vec{F}$  مطلوبست محاسبه انتگرال خطی  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$  در امتداد یک چهارم

دایره به شعاع ۳ که در شکل نشان داده شده است.



$$\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x, \quad A: \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad B: \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}$$

**روش اول:** در مختصات مستطیلی

$$d\vec{l} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = xy dx - 2x dy$$

$$x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x, y \leq 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9 - y^2}, \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

**معادله مسیر:** دایره‌ای به شعاع ۳

و چون مسیر در ربع اول است X و Y هر دو مثبت:

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B (xy dx - 2x dy) = \int_A^B xy dx - \int_A^B 2x dy \\ &= \int_3^0 x \sqrt{9 - x^2} dy - \int_0^3 2 \sqrt{9 - y^2} dy \\ &= \left[ -\frac{1}{3} (9 - x^2)^{3/2} \right]_3^0 - \left[ y \sqrt{9 - y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} \right]_0^3 = -9 \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

**روش دوم:** در مختصات استوانه‌ای

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \hat{a}_r (xy \cos \phi - 2x \sin \phi) - \hat{a}_\phi (xy \sin \phi + 2x \cos \phi)$$

$$d\vec{l} = \hat{a}_r dr + \hat{a}_\phi r d\phi + \hat{a}_z dz$$



مسیر در موقعیت  $z=0$  و  $r=3$  قرار دارد به نحوی که  $dz=0$  و  $dr=0$  بنابراین  $d\vec{l}|_{r=3} \equiv \hat{a}_\phi 3d\phi$  در نتیجه در محاسبه  $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  تنها مؤلفه  $F_\phi$  کارساز خواهد بود. همچنین  $x=3\cos\phi$  و  $y=3\sin\phi$  در  $F_\phi$  جایگزین کرده:

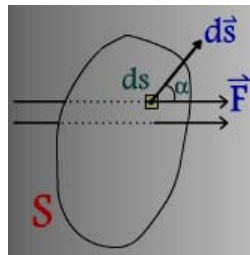
$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3(9\sin^2\phi \cos\phi + 6\cos^2\phi)d\phi = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

### انتگرال سطحی Surface Integral

طریقه نمایش بصورت روبرو می باشد:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

و با توجه به تعریف  $d\vec{s}$  که بردار عمود بر سطح در جهت خارج از سطح است مؤلفه  $\vec{F}$  در جهت عمود بر سطح را بدست آورده  $(F \cos\alpha)$  در  $ds$  ضرب می کنیم و نهایتاً روی سطح  $S$  انتگرال می گیریم:



مفهوم انتگرال سطحی: چنانچه  $\vec{F}$  بردار نمایش دهنده یک میدان باشد انتگرال  $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$  کل فلو

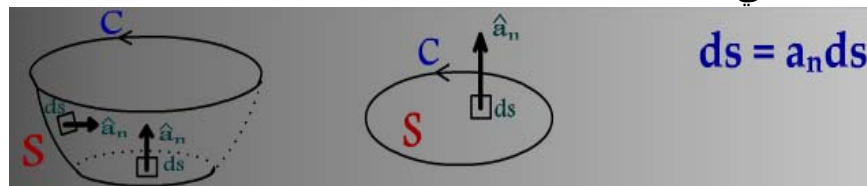
(شار) بردار  $\vec{F}$  که از سطح  $S$  خارج می شود را محاسبه می نماید.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

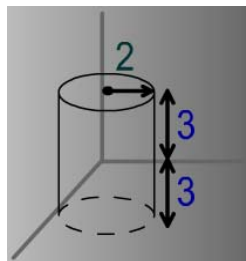
چنانچه سطح  $S$  باز باشد از نمایش روبرو استفاده می کنیم:

اگر سطح باز باشد جهت  $d\vec{s}$  با استفاده از قانون دست راست بدست می آید.

انگشتان دست راست در جهت منحنی  $C$  که سطح باز  $S$  را محصور می کند و انگشت شست جهت  $d\vec{s}$  را نشان می دهد.



**مثال:** محاسبه  $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$  روی سطح استوانه داده شده در شکل برای تابع برداری  $\vec{F}$ :



$$\vec{F} = \hat{a}_r \frac{A}{r} + \hat{a}_z Bz$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

سطح جانبی    قاعده پائین    قاعده بالا

$$\begin{aligned}
 \text{at } z=3 &\Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi \\
 \Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{z=3} &= (Bz r dr d\varphi)_{z=3} = 3B r dr d\varphi \\
 \Rightarrow \int_{z=3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3B r dr d\varphi = 12\pi B \\
 \text{at } z=-3 &\Rightarrow \hat{a}_n = -\hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = -d\hat{s}_z = -\hat{a}_z r dr d\varphi \\
 \Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{z=-3} &= -(-3B r dr d\varphi) = 3B r dr d\varphi \\
 \Rightarrow \int_{z=-3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3B r dr d\varphi = 12\pi B \\
 \text{at } r=2 &\Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_r \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz \\
 (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{r=2} &= \left( \frac{A}{r} r d\varphi r z \right)_{r=2} = A d\varphi dz \\
 \Rightarrow \int_{r=2} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{-3}^3 \int_0^{2\pi} A d\varphi dz = 12\pi A \\
 \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= 12\pi B + 12\pi B + 12\pi A = 24\pi B + 12\pi A
 \end{aligned}$$

**مشتق‌گیری:** در این قسمت به ارائه سه عمل مشتق‌گیری می‌پردازیم که دو نوع آن بر روی بردارها صورت می‌گیرد که نتیجه یکی اسکالر و دیگری بردار است و نوع سوم مشتق خاصی است که بر روی اسکالر انجام می‌شود اما نتیجه آن یک بردار خواهد بود.

## دیورژانس (بخش) یک تابع برداری Divergence

**تعریف:**

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$

بنابراین دیورژانس یک تابع برداری با فلوی خروجی از هر متر مکعب برابر می‌گردد. با صرف نظر کردن از طریقه عملیات، محاسبه دیورژانس در دستگاه‌های مختصات متعامد معرفی شده بصورت زیر خواهد بود.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{در دستگاه مستطیلی}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{در دستگاه استوانه‌ای}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{در دستگاه کروی}$$

**کاربرد:** اگر  $\vec{v}$  سرعت حرکت یک سیال در هر نقطه باشد و  $\rho$  چگالی حجمی آن سیال  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$  به مفهوم آن خواهد بود که سیال غیر قابل تراکم‌پذیری است یعنی شار (فلوی) جرم وارد شده به یک سطح بسته همواره با فلوی خارج شده از آن سطح برابر است و  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) > 0$  نشان دهنده یک ماده قابل انفجار و بعنوان منبع source برای یک فرآیند تراکم‌پذیر نتیجه می‌دهد و بعنوان حفره و گودال sink است.

## کرل (پیچش) يك تابع برداري Curl

تعریف:

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$$

$$(\nabla \times \vec{F})_s = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{a}_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_c \vec{F} d\vec{l}}{\Delta s}$$

با توجه به تعریف فوق مشخص است که چنانچه  $\vec{F}$  بر روی سطح  $\Delta s$  عمود باشد و یا تصویری نداشته باشد مؤلفه کرل  $\vec{F}$  در جهت  $\hat{a}_s$  وجود ندارد و یا بعبارتی چرخشی ندارد یعنی پیچش این بردار در جهت  $\hat{a}_s$  برابر صفر است. بنابراین مؤلفه کرل هر بردار در هر جهت معیاری از چرخش خطوط میدان برداری فوق در صفحه عمود بر آن جهت است.

$\hat{a}_s$  می‌تواند  $\hat{a}_z, \hat{a}_y, \hat{a}_x$  یا هر جهت دیگر باشد.

در مختصات مستطیلی

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \hat{a}_y \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \hat{a}_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

در مختصات کروی

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_R & RF_\theta & R \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$$

## گرادیان (شیب) Gradient

گرادیان بزرگترین مقدار مشتق يك تابع اسکالر نسبت به تغییر مکان می‌باشد و جهتش در همان سمتی که بزرگترین مقدار مشتق نسبت به تغییر مکان اتفاق می‌افتد می‌باشد بنابراین گرادیان يك مشتق گیری جهتی است. directional derivative. برای درک مفهوم گرادیان تابع اسکالر  $\phi$  را در نظر بگیرید:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$$

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$$

اگر  $\Delta l$  کمترین مقدار باشد،  $\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$  بزرگترین تغییرات (مشتق) را خواهد داشت برای محاسبه

$$\left. \frac{\Delta \phi}{\Delta l} \right|_{\max} = \frac{\Delta \phi}{\Delta n}$$

بیشترین تغییرات باید  $\Delta l = \Delta n$  شود:

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi = \frac{d\phi}{dn} \hat{a}_n$$

یعنی

$$\nabla \phi = \hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

در مختصات مستطیلی

$$\nabla\phi = \hat{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} + \hat{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه ای

$$\nabla\phi = \hat{a}_R \frac{\partial\phi}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

در مختصات کروی

**قضایای بر روی توابع برداری**

$$\nabla \times \nabla\phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

**- فضای صفر (Null)****- قضیه گاوس (دیورژانس)**برای هر سطح بسته  $S$  که شامل حجم  $V$  است.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

**- قضیه استوکس Stokes**برای هر مسیر بسته  $C$  که شامل سطح باز  $S$  است.

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

**- قضیه هلمهولتز Helmholtz**

با توجه به شکل ریاضی این قضیه در محیط نامحدود

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{R}')}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} dv' + \nabla \times \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{R}')}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

این قضیه چنین بیان می‌شود که هر میدان برداری توسط پخشش و پیچش (دیورژانس و کرل) میدان کاملاً مشخص می‌شود یعنی برای مشخص کردن کامل میدان  $\vec{F}$  فقط نیاز به داشتن  $\nabla \cdot \vec{F}$  و  $\nabla \times \vec{F}$  است.

**بیان دیگر:** یک میدان برداری یا تابع برداری را می‌توان بصورت مجموع گرادیان یک تابع اسکالر و

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$$

کرل یک تابع برداری نوشت مثال‌های کاربردی قضایای فوق در آخر فصل ارائه خواهد شد.

**مشتقات مرتبه بالاتر**

علاوه بر قضایای صفر، لاپلاسین نیز یک مشتق از مرتبه بالاتر می‌باشد:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$$

مثلاً در مختصات مستطیلی

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot \left( \hat{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

$$= \left( \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{a}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

در مختصات کروی

نوع دیگر مشتقات از درجه بالاتر

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

که در آن (مختصات مستطیلی)

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{a}_x \left( \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \hat{a}_y \left( \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) + \hat{a}_z \left( \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right)$$

- برخی روابط مشتق‌گیری

$$\nabla \cdot (\phi \vec{F}) = \phi \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \phi \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \times (\phi \vec{F}) = \phi \nabla \times \vec{F} + \nabla \phi \times \vec{F}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

**مثال ۱:** یک ابر الکترونی در ناحیه بین دو کره هم‌مرکز (در مبدأ مختصات) به شعاع‌های ۲و ۵ سانتیمتر دارای چگالی بار  $\rho = \frac{-3 \times 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi$   $\text{C/m}^3$  مستقر شده‌اند مطلوبست

محاسبه کل بار محصور شده در این ناحیه.

$$Q = \int_V \rho dv'$$

$$dv' = R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.02}^{0.05} \frac{-3 \times 10^{-8} \cos^2 \phi'}{R'^4} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R'^2} \cos^2 \phi' \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

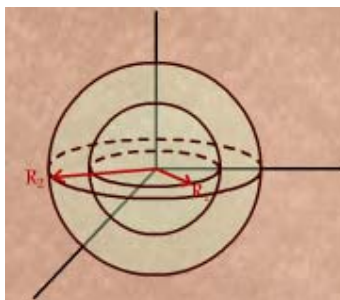
$$= -3 \times 10^{-8} \left[ \frac{\phi'}{2} + \frac{\sin 2\phi'}{4} \right]_0^{2\pi} \times [-\cos \theta']_0^\pi \times \left[ -\frac{1}{R'} \right]_{0.02}^{0.05}$$

$$= -1.8\pi \quad \mu\text{C}$$

**مثال ۲:** برای تابع برداری داده شده  $\vec{F} = \hat{a}_R KR$ ، تعیین کنید که آیا قضیه دیورژانس برایناحیه محصور شده توسط سطح‌های کروی در  $R = R_1$  و  $R = R_2$  (به نحویکه  $R_1 < R_2$ ) هم

مرکز در مبدأ مختصات همانطور که در شکل نشان داده شده است، صادق می‌باشد؟

(عدد ثابت)



$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$S_1 : R = R_1 \quad , \quad d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_R = -\hat{a}_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\int (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{s_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (KR_1) \hat{a}_R \cdot (-\hat{a}_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi) = -4\pi KR_1^3$$

$$S_2 : R = R_2 \quad , \quad d\vec{s}_2 = d\vec{s}_R = \hat{a}_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\int (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{s_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (KR_2) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi KR_2^3$$

$$\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3)$$

بنابراین

اما

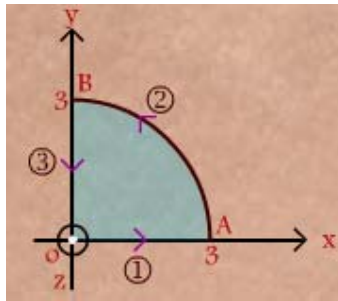
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) + 0 + 0 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (KR^3) = 3K$$

$$\int_v \nabla \cdot \vec{F} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} 3K R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi = 3k \left[ \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3) \right] = 4\pi k (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Rightarrow \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_v \nabla \cdot \vec{F} dv$$

**مثال ۲:**

برای بردار داده شد  $\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x$  صحت قضیه استوکس روی یک ربع دیسک به شعاع ۳ که در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد را بررسی کنید.



$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^0 \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$y=0 \quad , \quad dy=0 \quad , \quad d\vec{l} = \hat{a}_x dx \quad \text{مسیر ۱:}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{l} = (-\hat{a}_y 2x)(\hat{a}_x dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -9(1 + \pi/2) \quad \text{مسیر ۲: قبلاً در مثالی محاسبه گردید.}$$

مسیر ۳:

$$x=0 \quad , \quad dx=0 \quad , \quad d\vec{l} = -\hat{a}_y dy \quad , \quad F=0$$

$$\Rightarrow F d\vec{l} = (0) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_B^0 \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

بنابراین

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = -9(1 + \pi/2)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_x(0) - \hat{a}_y(0) = \hat{a}_z \left( \frac{\partial(-2x)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) = \hat{a}_z(-2-x)$$

اما

$$\int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad , \quad d\vec{s}_z = \hat{a}_z dx dy$$

$$\begin{aligned} \int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2+x) dx dy = -\int_0^3 \left[ 2\sqrt{9-y^2} + \frac{1}{2}(9-y^2) \right] dy \\ &= -\left[ y\sqrt{9-y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{9} \right]_0^3 = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

**روش دیگر:** محاسبه در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \times \vec{F} = -\hat{a}_z(2+x) = \hat{a}_z(2+r \cos \varphi)$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\begin{aligned} \int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 -(2+r \cos \varphi) r dr d\varphi = -\int_0^{\pi/2} \int_0^3 2r dr d\varphi - \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r^2 \cos \varphi dr d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{2} (r^2)_0^3 + \left( \frac{1}{3} r^3 \right)_0^3 [-\sin \varphi]_0^{\pi/2} \\ &= -9 \times \frac{\pi}{2} - 9 \times 1 = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

بنابراین