فصل پنجم

سری و انتگرال فوریه
Fourier series and integrals

1-5: توابع متناوب: periodic functions

سری مثلثاتی: trigonometric series

تابع f(x) یک تابع متناوب است اگر یک عدد مثبت Tبشکلی وجود داشته باشد که:
$f(x+T)=F(x)$

در اینصورت عدد Tرا تناوب (period) تابع می نامند.

به این ترتیب تابعی تناوبی است که خود را بعد از هر تناوب T تکرار کند. بهترین مثال توابع تناوبی همان توابع سینوسی و کسینوسی هستند. هم چنین تابع ثابت $f=c=$ نیزیک تابع تناوبی است و T برای آن هر مقدار مثبت میتواند باشد.

میتوان هر تابع با تناوب 2π را بر حسب توابع سینوسی یا کسینوسی که آنها نیز داراي تناوب 2π هستند بسط داد. این نوع بسط را بسط مثلثاتي نيز مي گويند.

بطور كلي عمل بسط يك تابع بر حسب توابع معلوم و مشخص مانند توابع سينوسي يا كسينوسي براي برخورد ساده تر با مسائل مهندسي است. تابع تناوبي در مسائل مهندسي توابع پيچيده اي هستند و لذا بايد اين توابع تناوبي پيچيده بر حسب توابع تناوبي ساده تري نوشته شوند تا تحليل و آناليز آنها ميّسر شود در غير اين صورت رفتار توابع پيچيده مهندسي كاري دشوار خواهد بود.

تمرینات:

1) كمترين تناوب مثبت T را براي توابع زير پيدا كنيد:

$a)\ Cosx,\ Sinx,\ Cos2x,\ Sin2x,\ Cos\pi x,\ Sin\pi x$

$b)\ Cosnx,\ Sinnx,\ Cos\frac{2\pi x}{k},\ Cos\frac{2\pi nx}{k}$

2) اگر T تناوب تابع f(x) باشد نشان دهيد nT(n=2,3,...) نيز تناوب f(x) خواهد بود.

3) اگر f(x) و g(x) داراي تناوب T باشند نشان دهيد h(x)=af(x)+bg(x) كه در آن b,a ثابت هستند هم داراي تناوب T خواهد بود.

4) انتگرالهاي زير را پيدا كنيد. اين انتگرالها جهت ادامه دروس اين بخش مورد لزوم هستند.

$$\int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx \quad , \quad \int_0^{\pi} \sin nx\,dx \quad , \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\ \cos nx\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx\,dx \quad , \quad \int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx \quad , \quad \int_0^{\pi} e^x\ \cos nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{0} e^x\ \sin nx\,dx$$

5ـ2 : سری فوریه

فرمولهای اولر

فرض كنيدكه تابع f(x) با تناوب 2π توسط سري مثلثاتي زير بسط داده شود:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx \qquad (A)$$

حال مي خواهيم a_n و b_n را پيدا كنيم. بديهي است با پيدا كردن a_n و b_n ، آنگاه f(x) بر حسب توابع متناوب سينوسي و كسينوسي بطور كامل نشان داده شده است. براي پيدا كردن ضرايب از طرفين رابطه بالا در محدوده π- تا π انتگرال گيري مي كنيم يعني :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos x + b_n\sin x\right)\right]dx$$

اگر طرف دوم را عبارت به عبارت انتگرال گيري كنيم خواهيم داشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\ a_0 + 0$$

به اين ترتيب:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

بهمين ترتيب اگر طرف اول عبارت (A) را يكبار در Cos mx و يكبار و نيز درsin mx ضرب نمائيم و انتگرالها را عبارت به عبارت حساب كنيم داريم:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad m = 1,2,\ldots$$

كه در محاسبه آنها از شرط تعامد توابع سينوسي و كسينوسي استفاده كرديم.

اين مطالب در گذشته و در بخش های قبلي نيز آمده است.

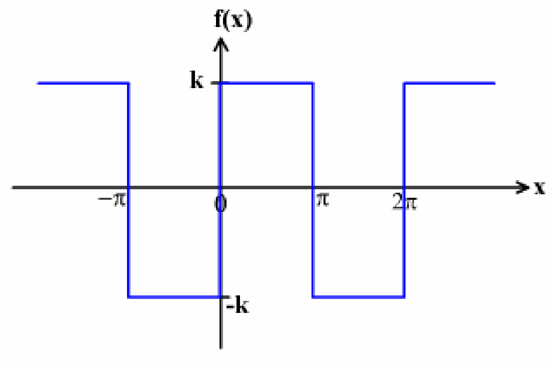
دانشجويان گرامي بايد براي ممارست خود انتگرالها را حساب كرده و ضرائب را بدست آورند.

ضرائب a_m و b_m را ضرائب فوريه مي نامند.

مثال:

موج مربعي:

موج مربعي زير را در نظر بگيريد:



فرم رياضي اين موج عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases} -k & \text{when } -\pi<x<0 \\ k & \text{when } 0<x<\pi \end{cases} \quad and \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

توابعي از اين نوع در اعمال نيروهاي خارجي به سيستم هاي مكانيكي يا نيروهاي الكتروموتيو در مدارات الكتريكي ديده مي شوند.

حال مي خواهيم f(x) را برحسب توابع سينوسي و كسينوسي بسط داده و ضرائب بسط را پيدا كنيم پس:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}k\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-k\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}+k\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}k\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[k\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}-k\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right]=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

و چون $Cosn\pi=\begin{cases} -1 & \text{براي n فرد} \\ 1 & \text{براي n زوج} \end{cases} \Rightarrow 1-Cosn\pi=\begin{cases} 2 & \text{n فرد} \\ 0 & \text{n زوج} \end{cases}$

پس:

$$b_1=\frac{4k}{\pi} \quad ، \quad b_2=0$$

$$b_3=\frac{4k}{3\pi} \quad ، \quad b_4=0$$

$$b_5=\frac{4k}{5\pi} \quad ، \quad b_6=0$$

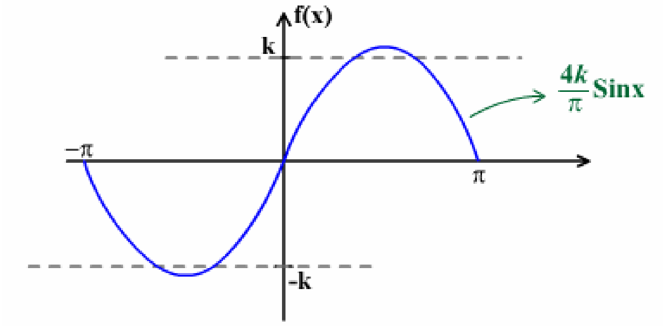
پس:

$$f(x)=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+{}^{1}\!/_{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\dots\right)$$

و البته همانطور كه ديده شد ضرائب a_n نيز صفر در آمد.

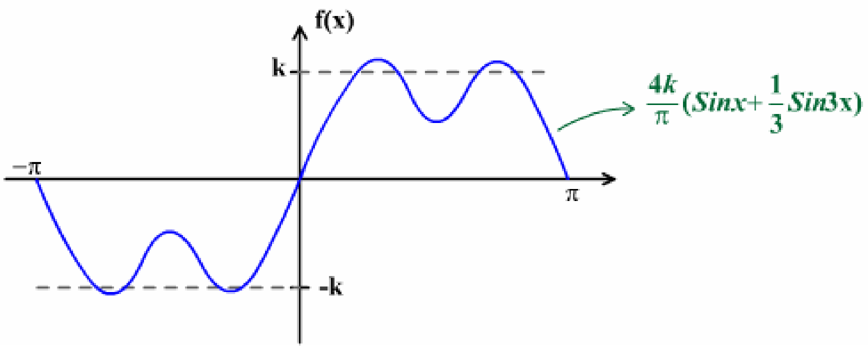
خوب حالا دقت كنيد منظور از بسط f(x) را بهتر درك كنيم.

اگر شما فقط جمله اول بسط را يعني عبارت $\frac{4k}{\pi}\sin x$ را بكار گيريد شكل f(x) خواهد بود.

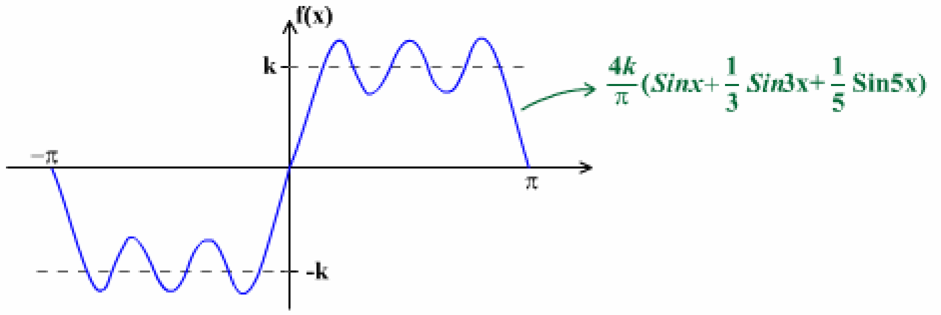


ملاحظه مي شود كه با بكارگيري جمله اول بسط شكل f(x) بخوبي حاصل نخواهد شد گرچه شباهتي ولو اندك با شكل f(x) يعني موج مربعي دارد.

حال اگر جمله دوم بسط را نيز اضافه كنيم داريم:



اين بار ملاحظه می شود كه با بكارگيري جمله دوم بسط شكل سري بسط به تدريج دارد به سمت شكل f(x) مي رود بطوريكه اگر جمله سوم را نيز در نظر بگيريم داريم:

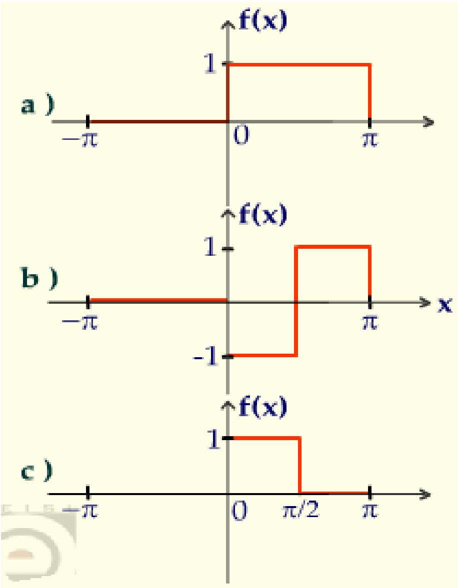


ملاحظه می شود كه با بكارگيري جمله سوم تقريباً شكل كلي f(x) در حال بدست آمدن است. پس انجام بسط و نوشتن توابع تناوبي به شكل بسط در حقيقت پي بردن به رفتار توابع پيچيده در مهندسي است. در اينجا هر چه جملات بيشتري از بسط را در نظر بگيريد جمع جملات بسط بيشتر و بيشتر به شكل اصلي f(x) نزديك مي شود. يعني f(x) چيزي نيست مگر جمع جملاتي مانند sin x به علاوه sin 3x به علاوه sin 5x به علاوه sin 7xتا آخر.

پس اگر ما از رفتار تابع مربعي در ابتدا اطلاع درستي نداشتيم حال مي توانيم بگوئيم كه با دانستن رفتار توابع $Sin7x, Sin5x, Sin3x, Sinx$ تا آخر بخوبي مي توان تابع f(x) را شناخت و تحليل كرد.

تمرينات:

1) سري فوريه توابع f(x) زير را پيدا كنيد و منحني جمع سه جمله از بسط را نيز رسم كنيد:



d₁) $f(x) = x \qquad (-\pi < x < \pi)$

d₂) $f(x) = x^2 \qquad (-\pi < x < \pi)$

d₃) $f(x) = x^3 \qquad (-\pi < x < \pi)$

e) $$f(x) = \begin{cases} x & if \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & if \quad \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

5ـ3 : توابع با تناوب دلخواه

اگر تابع f(t) داراي تناوب T باشد آنگاه مي توان متغير جديدي به نام x معرفی كرد بطوريكه f(t(x)) داراي تناوب 2π باشد. چون روابط براي حالتی كه تناوب 2π باشد در دست است پس براحتي ميتوان موضوع را به حالتيكه تناوب T باشد تعميم داد.

$$f(t) = f(\frac{T}{2\pi}x) \Rightarrow x = \frac{2\pi}{T}t$$

به عبارت ديگر $x = \pm\pi$ متناظر با $t = \pm T/2$ است. اين بدان معنا است كه تابع f به عنوان تابعي از x داراي تناوب 2π است.

$$f(t) = f(\frac{T}{2\pi}x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}x)\cos nx\,dx$$

$$b_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}x)\sin nx\,dx$$

با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

و به این ترتیب سري فوریه عبارت است از:

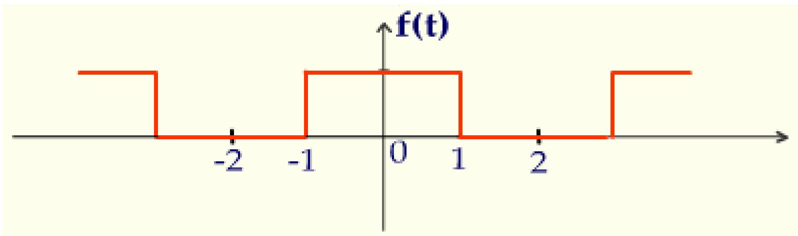
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t)$$

مثال:

1) موج مربعي متناوب

تابع f(t) را در نظر بگیرید و ضرائب بسط را پیدا کنید:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & when \quad -2 < t < -1 \\ k & when \quad -1 < t < 1 \qquad T = 4 \\ 0 & when \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,dt = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{n\pi}{2}t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi}{2}t\,dt$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

پس:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{n براي زوج} \\ \frac{2k}{n\pi} & n = 1,5,9,\ldots \\ \frac{-2k}{n\pi} & n = 3,7,11,\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\sin\,\frac{2n\pi t}{T}\,dt = 0$$

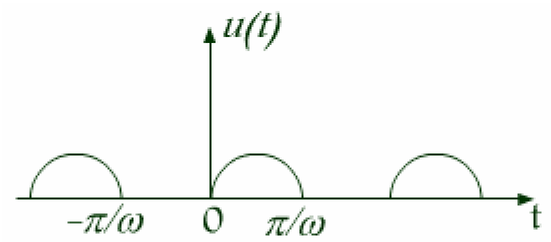
$$n = 1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow\; f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t\ldots$$

یکسو کننده نیمه موج Half-Wave Rectifier

در اینجا برای درك بیشتر مفهوم بسط فوریه یك یکسو کننده نیمه موج مورد بررسي قرار مي گيرد.

سئوال: يك ولتاژ سينوسي به شكل $E\sin\omega t$ از يك يكسو كننده نيمه موج عبور مي كند و قسمت منفي ولتاژ مزبور حذف مي شود. سري فوريه تابع تناوبي يكسو شده را پيدا كنيد. (شكل زير)



$$U(t) = \begin{cases} 0 & when\quad \frac{-T}{2} < t < 0 \\ E\sin\omega t & when\quad 0 < t < T/2 \end{cases} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)\;dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} U(t)\;dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} U(t)\;dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{\pi/w} E\sin\omega t\quad dt = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)\,\cos\frac{2n\pi t}{T}\;dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)\,\cos n\,\omega t\,dt$$

چون $\frac{2\pi}{T} = \omega$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cos n\omega t\,dt = \frac{\omega E}{2\pi}\int_{0}^{\pi/\omega}\left[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\right]dt$$

وقتي n=1 باشد جواب انتگرال طرف راست صفر خواهد بود و براي ...,n=2,3 داريم:

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} = \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right]$$

وقتي n فرد باشد عبارت بالا صفر است و وقتي n زوج باشد داريم:

$$a_n = \frac{E}{2}\left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}$$

$$n = 2,4,6,...$$

بهمين ترتيب براي ضرائب b_n داريم:

$$b_1 = \frac{E}{2} ؛ \; b_n = 0 \quad for \quad n = 2,3,...$$

پس:

$$U(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin \omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\times 5}\cos 4\omega t + ...\right)$$

تمرينات:

1) سري فوريه يك تابع تناوبي كه توسط عبور يك ولتاژ U(t) = 2 Cos 100 πt از يك يكسو كننده نيمه موج حاصل شده است را پيدا كنيد.

2) سري فوريه تابع تناوبي f(t) با تناوب T را بدست آورده و حاصل سه جمله از مجموعه جمع را نيز رسم كنيد.

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 2 \end{cases} \quad T = 4$

b) $f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 3 \end{cases} \quad T = 4$

c) $f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases} \quad T = 2$

4ـ5 توابع زوج و فرد

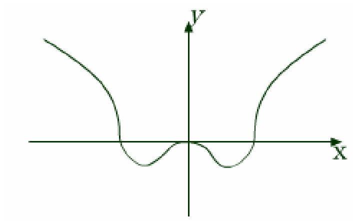
چنانچه توابع تناوبي كه مي خواهيم سري فوريه آنها را بدست آوريم زوج يا فرد باشند كار آسانتر خواهد بود و بدون انجام محاسبات اضافي ضرائب بسط بدست مي آيند.

توابع زوج:

اگر تابع y=g(x) در عبارت زير صدق كند آنرا زوج مي نامند.

براي همه x ها g(-x) = g(x)

شكل زير نمونه اي از يك تابع زوج را نشان مي دهد:

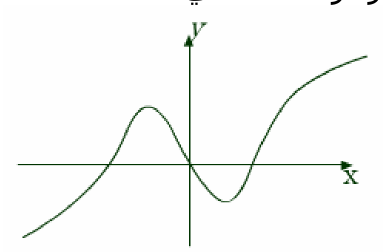


توابع فرد

اگر تابع g = h(x) در عبارت زير صدق كند آنرا فرد مي نامند.

براي همه x ها h(-x)=-h(x)

شكل زير نمونه اي از يك تابع فرد را نشان مي دهد:



به عنوان مثال تابع Cos nx يك تابع زوج و تابع sin nx يك تابع فرد است.

اگر g(x) يك تابع زوج باشد مي توان نوشت:

$$\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{T/2} g(x)\,dx$$

و اگر تابع h(x) يك تابع فرد باشد خواهيم داشت:

$$\int_{-T/2}^{T/2} h(x)\,dx = 0$$

اگر دو تابع g(x) و h(x) كه يكي زوج و ديگري فرد باشد در يكديگر ضرب شوند حاصلضرب كه يك تابع q(x)=h(x)g(x) است فرد خواهد بود.

پس به اين ترتيب:

اگر f(t) زوج باشد عبارت $f(t)\,\sin\dfrac{2n\pi t}{T}$ فرد خواهد بود و لذا $b_n=0$. بهمين ترتيب اگر f(t) فرد باشد عبارت $f(t)\cos\dfrac{2n\pi t}{T}$ فرد بوده و $a_n=0$ خواهد بود.

سري فوريه توابع زوج و فرد

1) سري فوريه يك تابع زوج f(t) با تناوب T يك سري كسينوسي فوريه خواهد بود.

(زوج) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt \quad ، \quad a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,\cos\frac{2n\pi t}{T}$$

$$n = 1,2,\ldots$$

2) سري فوريه يك تابع فرد f(t) با متناوب T يك سري سينوسي فوريه مي باشد.

(فرد) $$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sin \frac{2n\pi}{T} t$$

$$b_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \ \sin \ \frac{2n\pi t}{T} \ dt$$

در حالت خاص چنانچه تابع f(x) زوج با تناوب 2π باشد داريم:

(زوج) $$f(t)=a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \quad ، \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$n = 1,2,\ldots$$

و در حالت خاص چنانچه تابع f(t) فرد با تناوب 2π باشد خواهيم داشت:

(فرد) $$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n = 1,2,\ldots$$

مثال:

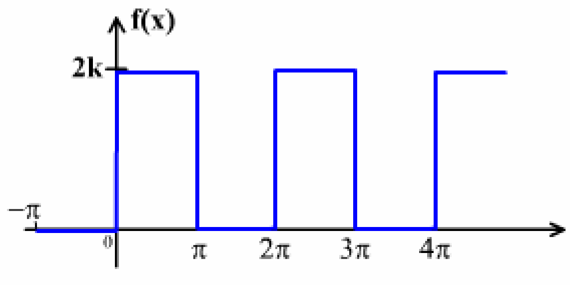
1) اگر به مثال موج مربعي به فرم $f(x)=\begin{cases} -k & when \quad -\pi < x < 0 \\ k & when \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ برگرديم ملاحظه خواهد شد كه حاصل سري فوريه عبارت بود از:

$$f(x)=\frac{4k}{\pi}(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\ldots$$

حال اگر اين تابع را با عبارت g(x)=k جمع كنيم حاصل عبارت است از:

$$F(x) = g(x) + f(x) = k + \frac{4k}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots.$$

شكل زير تابع F(x) را نشان مي دهيد:

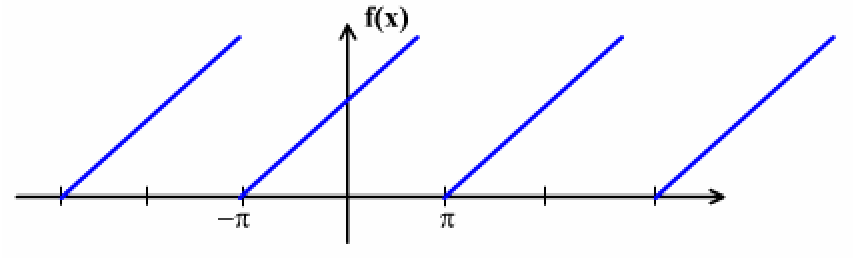


اين مثال نشان مي دهد كه سري فوريه تابع F(x)=g(x)+f(x) عبارت است از سري فوريه تابع g(x) به علاوه سري فوريه تابع f(x) .

به شكل F(x) كه از حاصل جمع سري فوريه دو تابع به دست آمده است پالس مستطيلي مي گويند.

2) موج دندان اره ای Saw-toothed Wave

سري فوريه تابع زير را حساب مي كنيم:



اين تابع به موج دندان اره اي موسوم است و ميتوان آنرا به شكل

$f(x) = x + \pi \quad when \quad -\pi < x < \pi \quad T = 2\pi$

نشان داد. ميتوان نوشت:

$f = f_1 + f_2 \quad ؛ \quad f_1 = x \quad and \quad f_2 = \pi$

ضرائب فوریه f_2 صفر هستند بجز $a_0 = \pi$

چون f_1 تابعي فرد است پس $a_n = 0 \; (n = 1,2,...)$ و براي b_n داريم:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

چنانچه از عبارت بالا به شكل جز به جز انتگرال بگيريم داريم:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi$$

بنابراين:

$$b_1 = 2 \quad ؛ \quad b_2 = -\frac{2}{2} \quad ؛ \quad b_3 = 2/3 \quad ؛ \quad b_4 = -2/4 \quad , \quad ...$$

و لذا نمايش سري فوريه f(x) عبارت است از:

$$f(x) = \pi + 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin\ 2x + \frac{1}{3}\sin 3x......)$$

تمرینات:

1) فرد بودن و زوج بودن را در مورد توابع زير تحقيق كنيد. ممكن است توابع نه فرد باشند نه زوج.

$x + x^2 \quad ; \quad |x| \quad ; \quad x\sin x \quad ; \quad \ln x \quad ; \quad x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad -\pi < x < 0 \\ x & if \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x^2 & if \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & if \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x) = |\sin x| \quad if \quad -\pi < x < \pi$

2) نشان دهيد كه تابع $f(x) = x^2$ درباره $(-\pi < x \le \pi)$ با $T = 2\pi$ داراي سري فوريه زير است:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x..........\right)$$

3) با گذاشتن $x = \pi$ در مسأله قبل جواب معروف زير كه توسط اولر بدست آمده است را تحقيق كنيد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

4) از مسأله 2 استفاده کنيد نشان دهيد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+....=\frac{\pi^2}{12}$$

5 ـ 5 بسط نيم بازه **Half-Range Expansions**

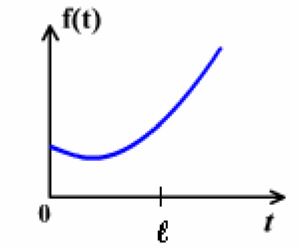
در بعضي از مسائل فيزيكي و مهندسي لازم مي شود كه به لحاظ فنی توابعي داشته باشيم كه فقط روي يك بازه محدود تعريف شده اند.

به عنوان مثال فرض كنيد تابع f(x) روي بازه $0\le t\le l$ تعريف شده باشد و ما مي خواهيم f(x) را با يك بسط فوريه نمايش دهيم.

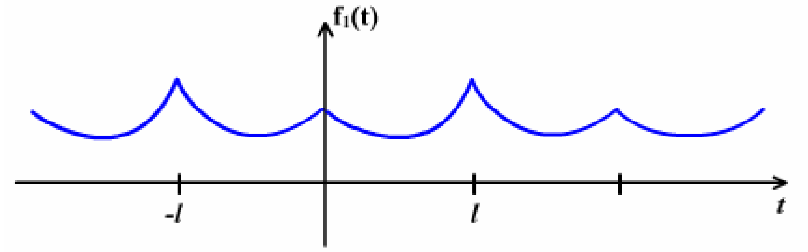
براي اينكار فرض مي كنيم كه بازه $0\le t\le l$ متناظر بازه انتگرال گيري $0\le t\le T/2$ باشد. به عبارت ديگر $T/2=l$ يا $T=2l$. به اين ترتيب با اختيار كردن عبارت $T=2l$ مشاهده مي شود كه ما تابع را به قسمت $-l\le t\le 0$ نيز گسترش داده ايم. بعد از اين موضوع حال ميتوانيم تابع مزبور را باتناوب بالا بشكل بسط فوريه كسينوسي يا بسط فوريه سينوسي نشان دهيم.

مثال:

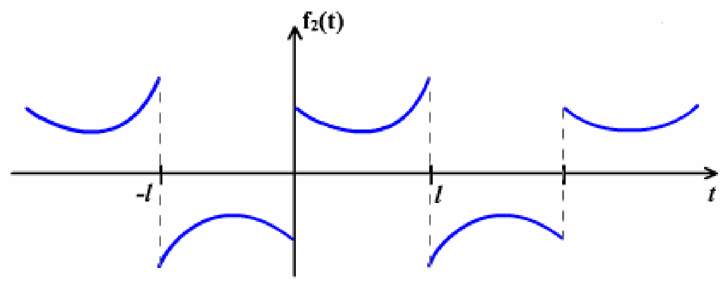
1) به عنوان مثال به تابع f(t) در شكل زير دقت كنيد.



اين تابع در محدوده $0\le t\le l$ تعريف شده است. براي نمايش اين تابع بشكل بسط فوريه كسينوسي لازم است تابع بشكل زير در محدوده $-l\le t\le l$ گسترش يابد (شكل زير)



و يا اينكه بخواهيم نمايش تابع را بشكل بسط فوريه سينوسي بدهيم كه در آن شرايط تابع بايد شكل زير را بخود بگيرد:



بعد از انتخاب چگونگي نمايش بسط فوريه تابع داده شده (كسينوسي يا سينوسي) از روابط قبلي داده شده براي محاسبه ضرائب بسط استفاده مي كنيم. يعني:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}t$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(t)\,dt \quad ; \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt \qquad n=1,2,...$$

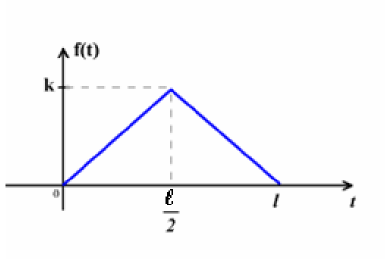
يا

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}t$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\,\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt \qquad n=1,2,...$$

2) پالس مثلثي:

بسط نيم بازه تابع زير موسوم به پالس مثلثي را پيدا كنيد.



$$f(t)=\begin{cases}\frac{2k}{l}t & if \quad 0<t<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-t) & if \quad \frac{l}{2}<t<l\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\left[\frac{2k}{l}\int_0^{L/2}t\,dt+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)\,dt\right]=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\frac{2k}{l}\int_0^{l/2}t\,\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt+\frac{2k}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt\right]$$

با انتگرال گيري جزرا به جزرا داريم:

$$\int_0^{l/2}t\,\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt=\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-1)$$

$$\int_{l/2}^{l}(l-t)\,\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt=-\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})$$

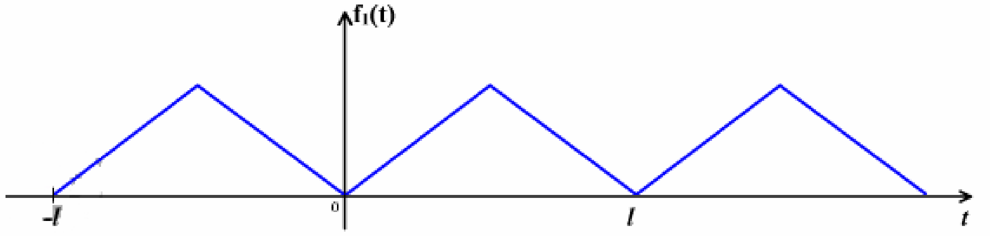
كه در نهايت خواهيم داشت:

$$a_n=\frac{4k}{n^2\pi^2}(2\,\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\;-1)$$

$$a_2=\frac{-16k}{2^2\pi^2}\;;\; a_6=\frac{-16k}{6^2\pi^2};....\; a_{10}=\frac{-16k}{10^2\pi^2}$$

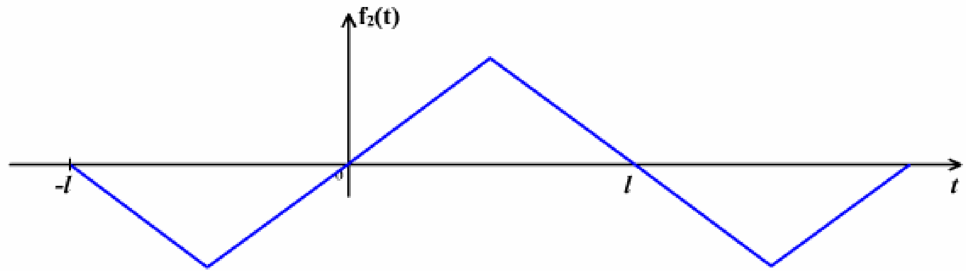
و $a_n=0$ وقتي كه $n\neq 2,6,10,14,....$

بنابراين بسط نيم بازه تابع f(t) در حالت کسينوسي بشکل زير است:



بهمين ترتيب بسط نيم بازه سينوسي نيز مي تواند مورد استفاده قرار گيرد يعني:

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$



و نهايتاً مي توان بسط کسينوسي و يا سينوسي نيم بازه تابع مذکور ار بصورت زير نوشت:

بسط کسينوسي نيم بازه $$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{l}t + \frac{2}{6^2}\cos\frac{6\pi}{l}t + \ldots\right)$$

بسط سينوسي نيم بازه $$f(t) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}t + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{l}t - \ldots\right)$$

تمرينات:

1) توابع زير را با سري کسينوسي فوريه بسط دهيد

$f(t) = 1 \qquad 0 < t < l$

$f(t) = t \qquad 0 < t < l$

$f(t) = t^2 \qquad 0 < t < l$

$f(t) = e^t \qquad 0 < t < l$

$f(t) = \sin\frac{\pi}{2l}t \qquad 0 < t < l$

2) توابع زير را با سري سينوسي فوريه بسط دهيد.

$f(t) = 1 \qquad 0 < t < l$

$f(t) = t \qquad 0 < t < l$

$f(t) = t^2 \qquad 0 < t < l$

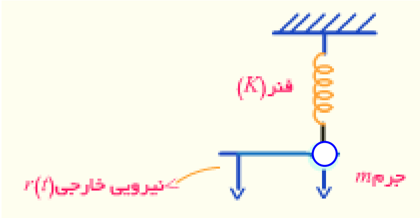
$f(t) = t^3 \qquad 0 < t < l$

6 ـ 5 : نوسانات زوری   Forced Oscillations

سري فوريه داراي كاربردهاي مهمي در رابطه با معادلات ديفرانسيل است.

در اينجا يك مسأله عملي كه در آن حل يك معادله ديفرانسيل معمولي مطرح است را مورد بررسي قرار مي دهيم.

به شكل زير دقت كنيد.



در اين شكل جرم m به فنري با ثابت k متصل شده است و نيروي خارجي r(t) به جسم وارد مي شود. چنانچه ثابت استهكاك C باشد معادله ديفرانسيل حاكم بر نوسان جرمm عبارت است از:

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=r(t)$$

كه در آن y انحراف جسم از وضعيت تعادل است.

در مسأله بالا مطالب زير قابل بحث و بررسي است:

الف) اگر نيروي خارجي r(t) نيرويی با شكل رياضي سينوسي يا كسينوسي باشد و ثابت استهكاك نيز صفر نباشد آنگاه جواب ايستا (Steady – State) معادله بالا يك حركت نوساني هماهنگ خواهد بود با فركانس تغييرات همان نيروي خارجي وارد شده به جسم.

ب) اگر r(t) يك تابع خالص سينوسي يا كسينوسي نباشد ولي بهرحال يك تابع تناوبي باشد، آنگاه جواب ايستا نمايش دهنده بر هم نهش نوسانات هماهنگ خواهد بود. اين نوسانات هماهنگ مي تواند با فركانس r(t) و يا با مضاربی از فركانس r(t) انجام شود.

اگر يكي از فركانسهاي نوساني جرمm در اين حالت به فركانس تشديد يا رزونانس سيستم ارتعاشی نزديك باشد، آنگاه ارتعاش سيستم با آن فركانس پاسخ بارز و غالب سيستم به نيروي خارجي است.

حال به طرح همين مسأله با مثال عددي مي پردازيم:

مثال عددی:

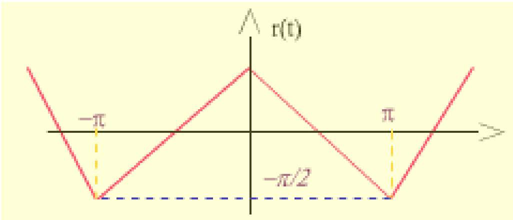
در معادله ديفرانسيل حاكم بر سيستم ارتعاشی مذكور كه فرض كنيد:

$$m=1\ gm \quad ; \quad c=0.02\ \ {gm}/{\sec} \quad , \quad k=25\ \ \frac{gm}{\sec^2}$$

بطوريكه معادله ديفرانسيل بشكل $\ddot{y}+0.02\dot{y}+25y=r(t)$ در مي آيد.

r(t) بر حسب $\frac{gm-cm}{\sec^2}$ اندازه گيري ميشود. حال فرض كنيد r(t) مطابق شكل زير به سيستم وارد شود:

$$r(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & if \quad -\pi<t<0 \\ -t+\pi/2 & if \quad 0<t<\pi \end{cases} \qquad T=2\pi$$



حال جواب اسيتاي y(t) را پيدا مي كنيم:

اگر r(t) را برحسب سري فوريه نشان دهيم بشكل زير در مي آيد:

$$r(t)=\frac{4}{\pi}(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+...)$$

پس ميتوان معادله ديفرانسيل را بشكل زير نوشت:

$$\ddot{y}+0.02\dot{y}+25y=\frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

$$n=1,3,...$$

از مطالب گذشته در مورد نوسانات زوري ميتوان نوشت:

$$y_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt$$

حال اگر جواب بالا را در معادله ديفرانسيل قرار دهيم و دو طرف را معادل بگيريم داريم:

$$A_n=\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D} \qquad ; \qquad B_n=\frac{0.08}{n\pi D}$$

در روابط بالا مقدارD مخرج عبارت است از: $D=(25-n^2)^2+(0.02n)^2$

چون معادله ديفرانسيل، ما خطي است پس انتظار داريم كه جواب كلي برهم نهش جوابهاي تكي باشد يعني:

$$y=y_1+y_3+y_5+...$$

در اينجا عبارت C_n را بگونه زير توصيف مي كنيم:

$$C_n=\sqrt{A_n^{\,2}+B_n^{\,2}}$$

اين عبارت از جواب معادله بشكل $y_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt$ بديهي است پس:

$$C_n=\sqrt{A_n^{\,2}+B_n^{\,2}}=\frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}$$

با در نظر گرفتن n هاي مختلف مقادير عددي C_n عبارت است از:

$C_1 = \quad 0.0530$

$C_3 = \quad 0.0088$

$C_5 = \quad 0.5100$

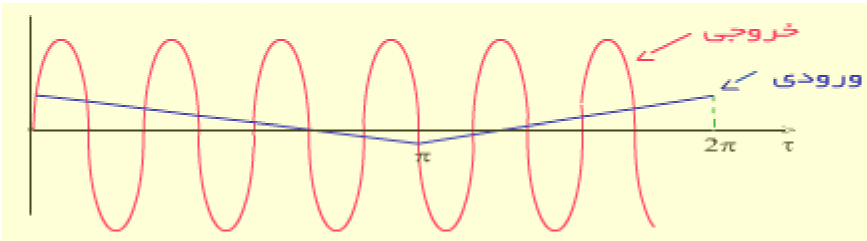
$C_7 = \quad 0.0011$

$C_9 = \quad 0.0003$

از روابط ملاحظه ميشود كه براي n=5 مقدار D بسيار كوچك مي شود و بهمين ترتيب C_5 خيلي بزرگ ميشود. اين مطلب نشان دهنده آن است y_5 (جواب متناظر با C_5) عبارت غالب در رابط $y = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots$ خواهد بود اين موضوع تلويحاً مي گويد كه:

حركت ايستا تقريباً يك حركت نوساني خواهد بود، بطوريكه فركانس آن پنج برابر فركانس تغييرات نيروي خارجي است.

به شكل زير در اين رابطه دقت فرمائيد:



تمرينات:

1) جواب عمومي معادله ديفرانسيل $\ddot{y} + \omega^2 y = r(t)$ كه در آن $\omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10.0 \quad ; \quad r(t) = \sin t$ باشد را پيدا كنيد.

2) مسأله بالا را براي حالتهاي زير حل كنيد.

$$r(t) = int + \frac{1}{9} Lin3t + \frac{1}{25} Lin5t$$

$$\omega = 0.5, 0.9, 1.1, 2, 2.9, 3.1, 4, 4.9, 5.1, 6, 8$$

$$r(t) = \frac{\pi}{4} |\sin t| \quad if \quad -\pi < t < \pi$$

$$\omega \neq 0, 2, 4, \ldots$$

$$r(t) = k \sin t$$

$$r(t) = \sin 3t$$

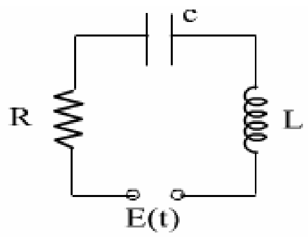
$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt$$

3) جريان ايستا (I(t)) در مدارRLC زير را در حالتي كه $R = 10\Omega \quad , \quad L = 10\ Henry\ , \quad C = 10^{-2}\ farad$ است پيدا كنيد.

$$E(t) = 100\, t\, (\pi^2 - t^2) \quad when \quad -\pi < t < \pi$$

$$T = 2\pi$$

راهنمائي: مطابق مراحل زير مسأله را حل كنيد.
ابتدا E(t) را بر حسب سري فوريه بنويسيد. I(t) بر حسب سري مثلثاتي ظاهر خواهد شد. يك فرمول عمومي براي ضرائب اين سري پيدا كنيد.
مقادير عددي چند تا از اين ضرائب را حساب كنيد.
سپس جمع چند عبارت سري را رسم كنيد.



4) مسأله بالا را براي حالت زير نيز حل كنيد:

$$E(t)=\begin{cases}100\ (\pi t+t^2) & if \quad -\pi<t<0 \\ 100\ (\pi t-t^2) & if \quad 0<t<\pi\end{cases} \qquad T=2\pi$$

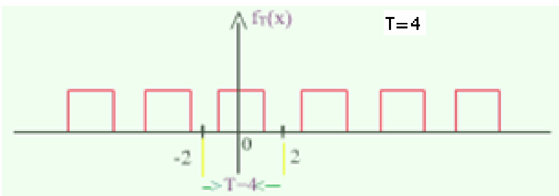
7ـ5 انتگرال فوريه

سري فوريه ابزاري قوي براي بررسي مسائل است كه در آنها توابع تناوبي مي باشند. ولي در بسياري از مسائل عملي و كاربردي، توابع تناوبي نيستند و لذا بايد روش سري فوريه را براي اينكه توابع غير تناوبي را نيز شامل شود تعميم داد.
ميتوان گفت كه اگر تابع $f_T(x)$ با تناوب T را در نظر بگيريم و سپس T را به سمت بي نهايت ميل دهيم حاصل تابعي مانند f(x) خواهد بود كه ديگر تناوبي نيست. اين موضوع را با مثال هاي زير نشان مي دهيم:

مثال:

1) تابع زير را كه در شكل نيز نشان داده شده است در نظر بگيريد:

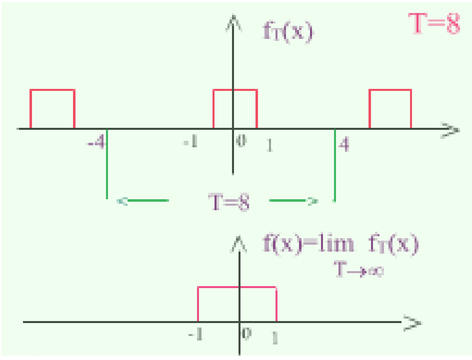
$$f_T(x)=\begin{cases}0 & when \quad -T/2<x<-1 \\ 1 & when \quad -1<x<1 \\ 0 & when \quad 1<x<T/2\end{cases}$$



اگر $T \to \infty$ آنگاه داريم:

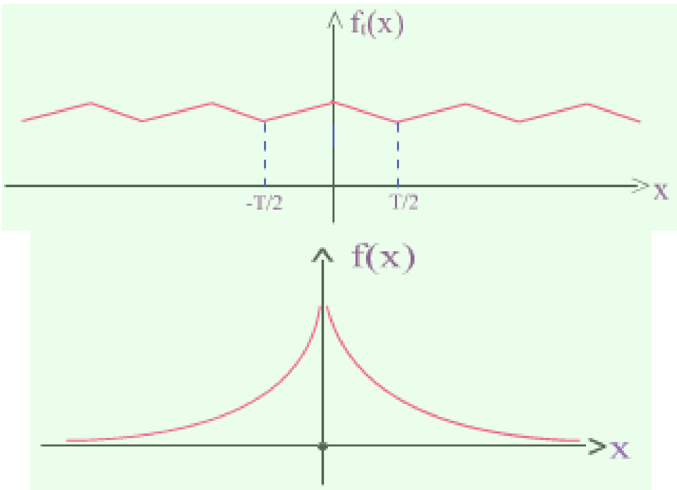
$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & when \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{بقيه جاها} \end{cases}$$

يعني:



2) تابع $f_T(x) = e^{-|x|}$ را در بازه $-T/2 < x < T/2$ بطوريكه $f_T(x+T) = f_T(x)$ را در نظر بگيريد و سپس:

$$f(x) = \lim \quad f_T(x) = e^{-|x|}$$



حال براي ادامه بحث و معرفي انتگرالهاي فوريه از يك تابع تناوبي به نام $f_T(x)$ با تناوب T شروع مي كنيم كه ميتواند بشكل زير بسط داده شود.

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T} x)$$

با يك تغيير متغير محاسبات را قدري آسانتر مي كنيم يعني $W_n = \frac{2n\pi}{T}$ حال اگر a_n و b_n را از روابط درسهاي قبلي در عبارت بالا قرار دهيم و متغير انتگرال گيري را نيز به v نشان دهيم سري بالا بشكل زير نوشته ميشود:

$$f_T(x) =$$
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,dv + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos W_n x\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\cos W_n v\,dv + \sin W_n x\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\sin W_n v\,dv\right]$$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

پس $\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \frac{2}{T} = \frac{\Delta W}{\pi}$

به اين ترتيب مي توان سري فوريه را بصورت زير نوشت:

$$f_T(x) =$$
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(w_n x)\Delta w\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\cos_n w_n v\,dv + \sin(w_n x)\Delta w\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\sin w_n v\,dv\right]$$

عبارت اخير براي هر مقدار T ولو خيلي بزرگ ولي محدود صحيح است. حال T را به سمت بي نهايت ميل مي دهيم و فرض مي كنيم كه تابع غير تناوبي f(x) حاصل روي محور x ها انتگرال پذير باشد يعني:

$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x)$ و $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ (وجود داشته باشد)

به اين ترتيب با ميل كردن T به سمت بي نهايت خواهيم داشت $\frac{1}{T} \to 0$ همچنين

$$\Delta W = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

پس به اين ترتيب جمله اول تابع $f_T(x)$ يعني جمله اي كه با $\frac{1}{T}$ شروع مي شوند به سمت صفر ميل مي كند و بقيه جملات به انتگرالهاي از صفر تا بي نهايت تبديل شدند يعني:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos Wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,Cos w v\,dv + \sin wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin w v\,dv\right]dw$$

حال A(w) و B(w) را بشكل زير تعريف مي كنيم:

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos w v\,dv$$
$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin w v\,dv$$

پس:

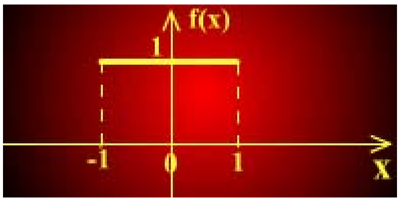
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right]dw$$

عبارت بالا نمايش f(x) است كه بشكل انتگرال فوريه نوشته شده است.

مثال:

1) تك پالس، انتگرال سينوسي

نمايش انتگرال فوريه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & if \quad |x|<1\\ 0 & if \quad |x|>1\end{cases}$ را بدست آوريد.



$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv=\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv=\frac{\sin wu}{w}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\sin w}{w}$$

$$B(w)=\int_{-1}^{1}\sin wv\,dv=0$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$$

با كمي دقت متوجه ميشويم كه بازه اي كه در آن f(x) تعريف شده است شامل نقاط x=1 و x=-1 نيست به عبارت ديگر تابع در نقاط مزبور پيوسته نيست. قضيه اي وجود دارد كه مي گويد در نقاطي كه f(x) منفصل است مقدار تابع در آن نقاط عبارت است از متوسط حد چپ و حد راست آن تابع در آن نقطه.

ما نيز از اين قضيه استفاده مي كنيم پس:

متوسط حد چپ و حد راست f(x) در x=1 عبارت است از $\frac{1+0}{2}=1/2$

پس

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=\begin{cases}\pi/2 & when \quad 0\le x<1\\ \pi/4 & when \quad x=1\\ 0 & when \quad x>1\end{cases}$$

انتگرال بالا را عامل غير پيوسته در يچلت (Dirichlet s discontinous factor) مي گويند.

حال به بررسي نقطه x=0 به عنوان نقطه اي با اهميت ويژه مي پردازيم:

وقتي x=0 است داريم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\pi/2$$

ملاحظه ميشود كه انتگرال بالا حد انتگرالي است كه به آن انتگرال سينوس مي گويند.

انتگرال سينوس به شكل زير نوشته مي شود:

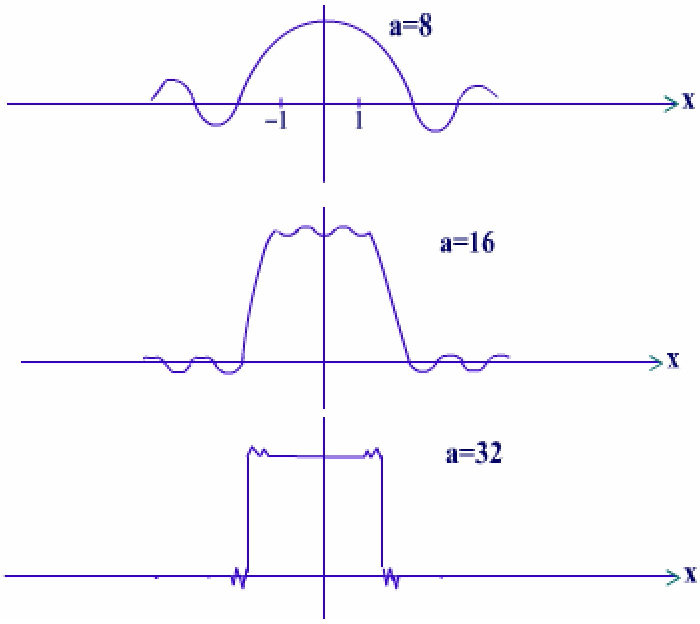
$$S_i(t)=\int_0^{7}\frac{\sin w}{w}\,dw$$

با $t\to\infty$ و انتگرال بالا به سمت $\pi/2$ ميل خواهد كرد.

در بحث سري فوريه جمع جملات سري تقريبي از تابع تناوبي بود كه سري اش را مي خواستيم بنويسيم. در اينجا نيز تقريبهاي انتگرال فوريه زمانی بدست مي آيند كه حد بالاي انتگرال گيري را بجاي ∞ عدد a قرار دهيم.

به اين ترتيب $\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ انتگرال $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ را تقريب مي زند.

شكل زير نوسانات حول نقطه x=0 را نشان ميدهد:



اين شكل ها مقدار انتگرال $\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$ را براي a=8,16,32 نشان ميدهند.

اگر f(x) يك تابع زوج باشد آنگاه B(w)=0 و داريم:

$$A(w)=2\int_0^\infty f(v)\cos wv\, dv$$

و $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw$ (زوج f)

اگر f(x) يك تابع فرد باشد آنگاه A(w)=0 و داريم:

$$A(w)=2\int_0^\infty f(v)\sin wv\, dv$$

و $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\sin wx\, dw$ (فرد f)

<u>مثال بعدي</u> : انتگرالهاي لاپلاس

بعضي اوقات با نمايش يك تابع مانند f(x) بشكل انتگرال فوريه در حقيقت ما به عبارتي مي رسيم كه بعداً براي انتگرال هاي معمولي بسيار لازم هستند.

براي درك اين موضوع به مثال زير توجه كنيد:

مي خواهيم انتگرال فوريه تابع $f(x)=e^{-kx}$ when $x>0$ را بدست آوريم. اين تابع زوج است يعني $f(-x)=f(x)$, $k>0$ چون f(x) زوج است پس داريم:

$$A(w)=2\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\, dv$$

با انتگرال گيري جز به جز حاصل عبارت بالا ميشود:

$$\int e^{-kv}\cos wv\, dv=-\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(\frac{-w}{k}\sin wv+\cos wv\right)$$

وقتي v=0 (حد پائيني انتگرال) مقدار عبارت سمت راست برابر است با $\frac{-k}{k^2+w^2}$ و وقتي $v=\infty$ (حد بالاي انتگرال) مقدار عبارت سمت راست صفر ميشود پس:

$$A(w)=\frac{2k}{k^2+w^2}$$

و به اين ترتيب:

$$f(x)=e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw \quad \begin{matrix} x>0 \\ k>0 \end{matrix}$$

بهمين ترتيب چنانچه $f(x)=e^{-kx}$ بوده و فرد باشد داريم:

$$f(x)=e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw$$

انتگرالهايي که داخل کادر در قرار گرفته اند به انتگرالهاي لاپلاس موسومند. گرچه براي بدست آوردن آنها از انتگرال فوريه استفاده شد ولي عبارتي بدست آمد که براي محاسبه انتگرالهاي پيچيده بسيار مفيد هستند.

تمرينات:

1) از نمايش انتگرال فوريه استفاده کرده و نشان دهيد:

a) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx+w\sin xw}{1+w^2}\,dw=\begin{cases} 0 & if \quad x<0 \\ \pi/2 & if \quad x=0 \\ \pi e^{-x} & if \quad x>0 \end{cases}$$

b) $$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos \pi w}{w}\sin xw\,dw=\begin{cases} \pi/2 & if \quad 0<x<\pi \\ 0 & if \quad x>\pi \end{cases}$$

c) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos xw}{w}\,dw=\begin{cases} \pi/2 & if \quad 0\le x<1 \\ \pi/4 & if \quad x=1 \\ 0 & if \quad x>1 \end{cases}$$